

Egyetemi szintű matektanfolyam

Feladatsorggyűjtemény

Készítette: Fontányi Andor

Matematikatanár

matekneked.hu

info@matekneked.hu

2025

Kedves Érdeklődő!

Készítettem számodra egy **egyetemi szintű matektanfolyamot oktatóvideókkal és feladatsorokkal**, melyet úgy állítottam össze, hogy gyorsan megértsd a lényegét. Tudásszinttől függetlenül, teljesen az alapoktól kezdve magyarázom a tananyagot, így a saját tempódban lépésről lépésre tudsz haladni.

Kinek ajánlom a tanfolyamot?

A tanfolyamot elsődlegesen azoknak ajánlom, akik most kezdenek neki egyetemi tanulmányaik első félévének vagy csak szívesen frissítenének fel matematikai ismereteiket. A kurzus tartalma megfelel a **Matek 1.** vagy **Analízis 1.** nevű tárgyak tematikájának.

Hol találom az oktatóvideókat?

Az egyetemi szintű matektanfolyam oktatóvideóit a „Fontányi Andor – matematikatanár” youtube-csatornámon találod.

Ez a feladatsorggyűjtemény a tanfolyam feladatait és a hozzá szükséges képlettárat tartalmazza.

Jó készülést és sok sikert kívánok!

Fontányi Andor

Matematika képlettár

Deriválás					
Elemi függvények deriváltjai					
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\sin x$	$\cos x$	$sh x$	$ch x$
x^n	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$ch x$	$sh x$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$tg x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$th x$	$\frac{1}{ch^2 x}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$-nx^{-n-1}$	$ctg x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$cth x$	$-\frac{1}{sh^2 x}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arsh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$	$\frac{a}{b}x^{\frac{a}{b}-1}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arch x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
e^x	e^x	$arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$arth x$	$\frac{1}{1-x^2}, x < 1$
a^x	$a^x \ln a$	$arcctg x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$arc th x$	$\frac{1}{1-x^2}, x > 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$				
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$				
Deriválási szabályok					
$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$			$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$		
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$			$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$		
$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$			$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$		

Integrálás

Elemi függvények primitív függvényei

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
c	$cx + C$	$\sin x$	$-\cos x + C$	$sh x$	$ch x + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\cos x$	$\sin x + C$	$ch x$	$sh x + C$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x + C$	$tg x$	$-\ln \cos x + C$	$th x$	$\ln(ch x) + C$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C, n \neq 1$	$ctg x$	$\ln \sin x + C$	$cth x$	$\ln sh x + C$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg x + C$	$\frac{1}{ch^2 x}$	$th x + C$
$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$	$\frac{x^{\frac{a}{b}+1}}{\frac{a}{b}+1} + C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctg x + C$	$\frac{1}{sh^2 x}$	$-cth x + C$
e^x	$e^x + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg x + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$arsh x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$arch x + C$
$\ln x$	$x \ln x - x + C$				
$\log_a x$	$x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$				

Integrálási szabályok

$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$	$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, a \neq 0$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x) + C$	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$	$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C, n \neq -1$

Határozott integrál alkalmazásai

Görbe ívhossza	$i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
Forgástest felszíne	$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
Forgástest térfogata	$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Kétváltozós függvények

P_0-beli gradiensvektor	$grad f(P_0) = (f'_x(P_0); f'_y(P_0))$
P_0-beli v irányú iránymenti derivált	$f'_v(P_0) = f'_x(P_0) \cdot \frac{v_1}{ v } + f'_y(P_0) \cdot \frac{v_2}{ v }$
P_0-beli érintősík egyenlete	$z = f'_x(P_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(P_0) \cdot (y - y_0) + f(P_0)$

1. Sorozatok

1.1. Sorozatok - Bevezetés

1.2. Monotonitás, korlátosság, konvergencia

Vizsgálja meg a következő sorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából!

1. $a_n = \frac{3n-1}{n+1}$

2. $a_n = \frac{3-4n}{2n-1}$

3. $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

1.3. Küszöbszám-keresés

Határozza meg a következő sorozatok határértékét, és keresse meg az adott ε -hoz tartozó küszöbszámot!

1. $a_n = \frac{2n+1}{5n-3}$ $\varepsilon = 10^{-2}$ $A = \frac{2}{5}$

2. $a_n = \frac{1}{2^n}$ $\varepsilon = 0,01$

1.4. Határérték-számítás

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+5n-9}{7n^2+8n}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^5+4n^3+7}{4n^5+3n^2}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^7+3n^5}{7n^9-8n}$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}-2^{n+2}}{5n+2n+3}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-2}$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+7}{n+1}\right)^n$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{5n-2}$

2. Függvényhatárértékek

2.1. Függvényhatárértékek végtelenben

Számoljuk ki a következő függvények $\pm\infty$ -ben vett határértékét!

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2}{x-5}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^4+3}-\sqrt[3]{x^7-9x^4}}{\sqrt[5]{x^{12}-1}+\sqrt{x+5}}$

2.2. Függvényhatárértékek véges helyen

Számoljuk ki a következő függvények véges helyen vett határértékeit!

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+5x-9}{x^2-4x+8}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2+2x-15}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+2x}{2x^2-3x+1}$

5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6}$

2.3. Függvényhatárértékek - Vegyes típusú gyakorló feladat

Határozzuk meg a következő függvények határértékét $\pm\infty$ -ben és a szakadási helyeknél!

1. $f(x) = \frac{2x^2-10x+8}{x^2+x-2}$

3. Deriválás

3.1. Differenciálhányados fogalma

3.2. Elemi függvények deriváltjai

A differenciálhányados segítségével határozd meg a következő függvények deriváltjait!

1. $f(x) = x^2$

2. $f(x) = x^3$

3. $f(x) = x^n$

3.3. Deriválási szabályok - Összeadás, kivonás

Összeg és különbség deriválása

1. $f(x) = 3x^7 + 4x^3 - x + 5$

2. $g(x) = 4\sqrt{x^3} + 9\sqrt[3]{x^5} - \frac{7}{x^4} + \frac{3}{\sqrt{x^9}}$

3. $h(x) = 3\ln x + 5\sin x - 4\cos x + \operatorname{tg} x$

3.4. Deriválási szabályok - Szorzás

1. $f(x) = (3x^5 - 9x)(7x^4 + 5x^2)$

2. $g(x) = (3e^x + 4x^3)(4\sin x - 2^x)$

3.5. Deriválási szabályok - Osztás

1. $f(x) = \frac{(3\cos x + 5\ln x)}{7x^8 - 3x^{11}}$

2. $g(x) = \frac{4x^8 + 3x^2}{\operatorname{tg} x + 2}$

3.6. Deriválási szabályok - Összetett függvények - Láncszabály

1. $f(x) = (4x + 9)^{10}$

2. $f(x) = \cos(x^2 + 2x)$

3. $f(x) = 2^{3x^2+9x}$

4. $f(x) = \ln(\sin x^2)$

5. $f(x) = \frac{\ln(5x+2)}{\operatorname{tg}(3x)}$

3.7. Deriválási szabályok - Speciális függvények

1. $f(x) = x^x$

2. $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

3.8. Érintőegyenles egyenlete

Határozzuk meg a következő függvények x_0 -beli érintőegyenlesének egyenletét!

1. $f(x) = x^2 - 9x + 6$ $x_0 = 1$

2. $f(x) = \ln(2x + 1)$ $x_0 = 2$

3.9. L'Hospital szabály

Számítsuk ki a következő határértékeket!

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{xe^x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

3.10. Függvényvizsgálat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot a következő függvényen!

1. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

4. Integrálás

4.1. Integrálás – Bevezetés

Határozd meg a következő integrálok eredményeit!

1. $\int (x^6 + 9x^5 - 3x + 2) dx$

2. $\int \left(\sqrt{x^3} - 7\sqrt[3]{x^{10}} + \frac{6}{x^5} + \frac{3}{\sqrt[4]{x^7}} - \frac{9}{x} \right) dx$

3. $\int \left(7 \sin x + 5 \cos x - 2 \cdot 5^x + \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx$

4.2. Alapvető integrálási szabályok – 1. típus

A megfelelő integrálási szabály alkalmazásával határozd meg a következő feladatok eredményét!

1. $\int (3x + 5)^{11} dx$

2. $\int \sin(2x - 7) dx$

4.3. Alapvető integrálási szabályok – 2. típus

A megfelelő integrálási szabály alkalmazásával határozd meg a következő feladatok eredményét!

3. $\int 2^{\cos x} \cdot \sin x dx$

4. $\int \frac{1}{\cos^2 7^x} \cdot 7^x \cdot \ln 7 dx$

4.4. Alapvető integrálási szabályok – 3. típus

A megfelelő integrálási szabály alkalmazásával határozd meg a következő feladatok eredményét!

5. $\int \sqrt{\cos x + 3} \cdot (-\sin x) dx$

6. $\int (6x^2 + 4x - 9)^{10} \cdot (3x + 1) dx$

4.5. Alapvető integrálási szabályok – 4. típus

A megfelelő integrálási szabály alkalmazásával határozd meg a következő feladatok eredményét!

$$7. \int \frac{8x + 2}{2x^2 + x + 7} dx$$

$$8. \int \operatorname{tg} x dx$$

4.6. Parciális integrálás

A parciális integrálási szabályt felhasználva oldd meg a következő feladatokat!

$$1. \int 3x \cdot 5^x dx$$

$$2. \int (3x^2 + 9) \cdot \sin 5x dx$$

$$3. \int x^2 \ln x dx$$

$$4. \int \operatorname{arctg} x dx$$

$$5. \int \sin x \cdot e^x dx$$

4.7. Racionális törtfüggvények

Határozzuk meg a következő racionális törtfüggvények integráltjait!

$$1. \int \frac{1}{2x+3} dx$$

$$2. \int \frac{2x}{2x+3} dx$$

$$3. \int \frac{1}{x^2+5} dx$$

$$4. \int \frac{2x+1}{x^2+4x+7} dx$$

$$5. \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$$

$$6. \int \frac{1}{(x+3)(x-1)^2} dx$$

$$7. \int \frac{x^3+4x^2+3}{x^2+7x+12} dx$$

4.8. *Határozott integrál*

Mennyi a következő határozott integrálok értéke?

1. $\int_1^2 (x^2 + 3x + 1) dx$

2. $\int_0^1 (3x + 1) \cdot e^{4x} dx$

4.9. *Területszámítás*

Mekkora területet zárnak közre egymással a következő függvények?

1. $f(x) = x^2 - 5x + 7$; $g(x) = 2x - 3$

2. $f(x) = -x^2 + 11x - 10$; $g(x) = -2x^2 + 22x - 28$

4.10. *Improprius integrálás*

Konvergensek-e az alábbi improprius integrálok?

1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

2. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

5. Kétváltozós függvények

5.1. Kétváltozós függvények - Bevezetés

Számítsuk ki a következő kétváltozós függvények első- és másodrendű parciális deriváltjait!

1. $f(x, y) = 4x^3 + 5x^2y^7 - 9y^3 + 8$

2. $f(x, y) = y^2 \cdot \ln 3xy$

5.2. Kétváltozós függvények - Gradiensvektor

Határozzuk meg a következő kétváltozós függvények gradiensvektorát az adott pontban!

1. $f(x, y) = 3x^2y + 2x - 4\sqrt{x} ; P_0(1, 4)$

2. $f(x, y) = x \cdot \ln(2x + y) ; P_0(3e, e)$

5.3. Kétváltozós függvények - Iránymenti derivált

Adjuk meg a következő függvények iránymenti deriváltjait a megfelelő helyen!

1. $f(x, y) = 2x^2y - 3xy^3 - 3x + y ; v(1, 2) ; P_0(1, 0)$

2. $f(x, y) = 2xe^y - 3ye^x ; v(3, -1) ; P_0(1, -4)$

5.4. Kétváltozós függvények - Érintősík egyenlete

Írjuk fel a következő függvények érintősíkjának egyenletét a megadott helyen!

1. $f(x, y) = 2x^3 + 3y^2 - y + 5 ; P_0(-1, 1)$

2. $f(x, y) = 4\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{y} ; P_0(1, 4)$

5.5. Többváltozós függvények - Szélsőértékszámítás

Határozzuk meg a következő kétváltozós függvények lokális szélsőértékhelyeit!

1. $f(x, y) = 3x^2 - 30x + y^3 - 6xy - 15y + 8$

2. $f(x, y) = xy - x^3 - y^2 + 2$