



# ÍGY HASZNÁLD A NÉGYJEGYŰDET!

---

FONTOSABB ÖSSZEFÜGGÉSEK A NÉGYJEGYŰ FÜGGVÉNYTÁBLÁZATODBAN

SZERKESZTETTE:

Fontányi Andor  
matematika tanár

email-cím: [vontanyi@gmail.com](mailto:vontanyi@gmail.com)



*Hosszú ideje foglalkozom érettségi felkészítéssel, és a munkám során többször tapasztaltam, hogy a diákjaim kezdetben nem mindig tudják használni a négyjegyű függvénytáblázatot. Általában a tanórákon csak felületesen térnek ki a használatára, holott a megfelelő szintű ismeretével sokkal könnyebbé válna akár egy dolgozat, akár az érettségi megírása.*

*Természetesen mondhatjuk azt, hogy egy-egy képlet ismerete elengedhetetlen a hétköznapijainkban, de úgy gondolom, hogy manapság, az okostelefonok és egyéb digitális eszközök korában már inkább az információ megtalálása mintsem bemagolása kellene, hogy előtérbe kerüljön.*

*Éppen ezért állítottam össze ezt a jegyzetet, amelyben megpróbáltam egyfajta útmutatóval szolgálni, és kiemelni azokat a részeket melyek ismeretében – és persze némi készüléssel – már bátran állhattok neki az érettségi kitöltésének.*



---

## FONTOS INFORMÁCIÓK/TANÁCSOK:

- Bármilyen hasznosnak is találd a jegyzetet, semmiképpen se írd bele semmit a négyjegyűdbe, hiszen ezzel azt kockáztatod, hogy elveszik tőled az érettségid!
- Jelölésre célszerű több különböző színű jelölő címkéket (post-iteket) használni, de ne vidd túlzásba, a túl sok szín csak összezavar. A gyakran használt szakaszokat **piros**, a kevésbé valószínűt **sárga** vagy **zöld** színű címkével jelöld!
- Ne használd a tartalomjegyzéket! Ha nem tudod, hogy mire van szükség és hogy azt hol találd, akkor azt nem onnan fogod kideríteni. Az ilyen keresgéeléssel csak értékes időt vesz el magadtól.
- Fontos, hogy ne csak az érettségid vagy otthon használd! Ha órán nem használjátok, és a tanárod esetleg nem teszi szóvá, hogy lehetne, kérdezz rá mindenképpen, biztosan nem fogja elutasítani.
- Hiába tűnik a négyjegyűd vaskosnak, valójában matekból csak kevés olyan oldal van, amik segítenek a feladatmegoldásban.
- Ugyan több kiadása is létezik a négyjegyű függvénytáblának, de a legelterjedtebb a fehér és a sárga borítójú. Elméletileg az a gyakorlat, hogy a fehéret emeltszinten, a sárgát pedig középszinten érettségizők számára javasolják, mivel mind bonyolultságban, mind pedig részletességben eltérnek egymástól. Természetesen, ha már megszoktad egyik vagy másik verzió használatát, akkor csak emiatt ne módosíts a választásodon.
- Továbbá érdemes tudni, hogy az érettségire akár több függvénytáblával is érkezhetsz, be fogják engedni.
- A legfontosabb társunk a felkészülésben a számológépünk. Figyeljünk arra, hogy ha újat vásárolnánk, akkor a szabályzat szerint „szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológép” legyen. Ha bizonytalan vagy abban, hogy milyen is ez, én egy *Casio fx 570es plus* márkájú gépet használok. A lényeg, hogy ki tudja számolni a másodfokú egyenlet megoldásait, mert ez jócskán megkönnyíti majd a dolgunkat.
- Kövesd a következő képek alapján, mely szakaszokhoz milyen színű jelölő címkét érdemes ragasztani a gyakorláshoz!

# Négyjegyű függvénytáblázatok, összefüggések és adatok

**MATEMATIKA**

**INFORMATIKA**

**FIZIKA**

**CSILLAGÁSZAT**

**FÖLDRAJZ**

**KÉMIA**



NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ

## 2.2. Halmazok

### 2.2.1. Elnevezések, összefüggések

Adott, ismert egy halmaz, ha mindenről el lehet dönteni, hogy eleme-e vagy sem.

**Jelölések:**

$a \in H$  – az  $a$  elem a  $H$  halmazhoz tartozik, annak eleme.

$x \notin T$  – az  $x$  elem nem tartozik a  $T$  halmazhoz, annak nem eleme.

**Halmaz megadása:**

Az elemek felsorolásával. Pl.:  $\{0; 2; 4; 6; 8\}$  – a páros számjegyek halmaza.

Eldöntési szabállyal. Pl.:  $\{x \mid E(x)\}$  – az  $E(x)$  szabálynak megfelelő  $x$  elemek halmaza.

Egyenlő két halmaz akkor és csak akkor, ha ugyanazokból az elemekből állnak.

**Venn-diagram:** a halmazok egymás közötti viszonyát ábrázoló grafikon.

Részhalmaza a  $Q$  halmaz egy  $H$  halmaznak, ha minden eleme  $H$ -nak is eleme:

$$Q \subseteq H \Leftrightarrow \forall x : (x \in Q \Rightarrow x \in H).$$

**Valódi részhalmaz:**  $Q \subset H \Leftrightarrow (Q \subseteq H) \wedge (Q \neq H).$

**Üres halmaz,** aminek nincsenek elemei:  $\emptyset$ .

Minden  $H$  halmazra igaz:  $\emptyset \subseteq H$ .

**Univerzális halmaz ( $U$ ):** minden létezőt egyesítő halmaz.

Minden  $H$  halmazra igaz:  $H \subseteq U$ .

**Számosság:** az  $A$  halmaz elemeinek száma =  $\text{card}(A)$ .

**A természetes számok halmazának számossága:**  $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$  (olv.: alef-null).

### 2.2.2. Műveletek halmazokkal

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ ;  $A$  és  $B$  **egyesítése** (uniója),

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ ;  $A$  és  $B$  **metszete** (közös része),

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n,$$

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ ;  $A$  és  $B$  **különbsége**, **különbség-halmaza**,

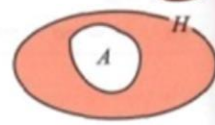
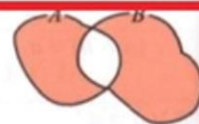
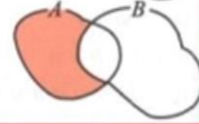
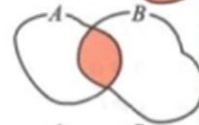
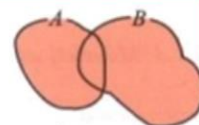
$A \odot B = A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ;  $A$  és  $B$  **szimmetrikus különbsége**,

$\overline{A_H} = \{x \mid x \notin A \wedge x \in H\} = H \setminus A$ ;  $A$ -nak  $H$ -beli **komplementere**,

$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ ;  $A$  és  $B$  **Descartes-szorzata**,

$A^2 = A \times A$ ;  $A$  halmaz **kétszeres Descartes-szorzata**,

$A^n = A \times A \times \dots \times A$ ;  $A$  halmaz  **$n$ -szeres Descartes-szorzata**.



→ Egy viszonylag gyakran előforduló, de könnyű feladattípus a halmazműveletekre építő. Két halmaz uniójának, metszetének és különbségének jelentését érdemes ismerni, valamint a hozzájuk tartozó kötőszavakat (ebben a sorrendben *vagy*, *és*, *csak*), hogy könnyebben megbirkózzunk a feladattal.

### 2.2.3. Műveleti azonosságok, tulajdonságok

$A, B, C, \dots$  részhalmazai  $H$ -nak,  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \dots$  ezek  $H$ -beli komplementere.

|                                                        |                                                        |                                    |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------|
| $\overline{\overline{A}} = A$                          |                                                        |                                    |
| $\overline{\emptyset} = H$                             | $\overline{H} = \emptyset$                             |                                    |
| $A \cup \emptyset = A$                                 | $A \cap H = A$                                         |                                    |
| $A \cup H = H$                                         | $A \cap \emptyset = \emptyset$                         |                                    |
| $A \cup \overline{A} = H$                              | $A \cap \overline{A} = \emptyset$                      |                                    |
| $A \cup B = B \cup A$                                  | $A \cap B = B \cap A$                                  | kommutatív                         |
| $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$                | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$                | asszociatív                        |
| $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$       | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$       | disztributív                       |
| $A \cup (A \cap B) = A$                                | $A \cap (A \cup B) = A$                                | adjunktív (abszorpció tulajdonság) |
| $A \cup A = A$                                         | $A \cap A = A$                                         | idempotens                         |
| $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | De Morgan-szabályok                |

### 2.3. Gráfok

#### 2.3.1. Elnevezések, összefüggések

**A csúcsok fokszáma, foka:** a rá illeszkedő élek száma.

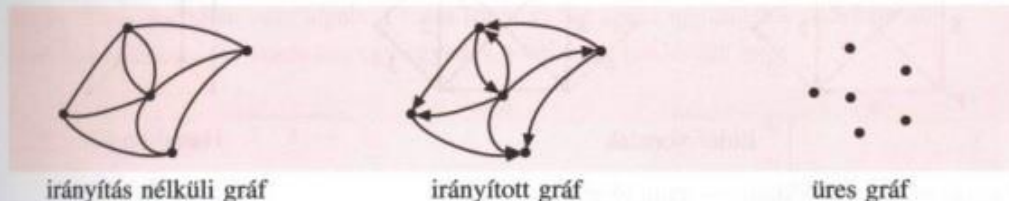
A csúcs *be-foka* a csúcsba futó, a *ki-foka* a belőle induló irányított élek száma.

*Reguláris gráf:* minden csúcsnak azonos a fokszáma ( $r$ -edfokú reguláris gráf).

*Többszörös (párhuzamos) élek:* ugyanazt a két csúcsot kötik össze.

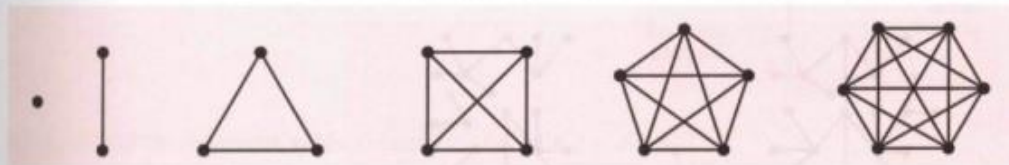
*Hurokél:* azonos a két végpontja.

*Isolált csúcs:* amelyhez nem csatlakozik él.



*Üres gráf:* nincsenek élei, a csúcsai *izoláltak*.

*Teljes gráf:* bármely két csúcsa közt van él.



→ A gráfok témaköréből kevés használható összefüggés található, érdemes tudni a fokszám jelentéséről, de a legfontosabbat, miszerint az élek száma egyenlő a fokszámok összegének felével, nem találhatjuk meg itt, ezt sajnos fejből kell tudnunk.

### 3.1.2. Számírás, számrendszerek

#### Római csomószámok és értékük:

$$\{I, V, X, L, C, D, M\} \rightarrow \{1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000\}$$

#### Helyiértékes számírás:

Decimális számjegyek:  $M_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Bináris számjegyek:  $M_2 = \{0, 1\}$

Oktális számjegyek:  $M_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Hexadecimális számjegyek:  $M_{16} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Babiloni törtek: az óra és a fok törtrészeire használatos 60-ados törtek.

$$1^\circ = 60' = 3600''; \quad 1^h = 60^m = 3600^s.$$

### 3.2. Egész számok

#### 3.2.1. Oszthatóság

**Osztója** a  $k$  egész az  $m$  egésznek – jelölése:  $k \mid m$  –, ha:

$$k \mid m \Leftrightarrow \exists q: q \in \mathbb{N} \wedge q \cdot k = m.$$

Az osztók (*faktorok*) halmazának jelölése:  $\text{fac}[x] = \{k : k \mid x, x \in \mathbb{N}\}$ .

**Többszöröse** az  $m$  egész a  $k$  egésznek, ha  $k$  osztója  $m$ -nek:  $k \mid m$ .

A többszörösök halmazának jelölése:  $\text{fac}^{-1}[x] = \{k : x \mid k, x \in \mathbb{N}\}$

**Oszthatósági szabályok** (10-es számrendszerben):

$$m = \alpha_n \cdot 10^n + \dots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0 = (\alpha_n \dots \alpha_1 \alpha_0)_{10}$$

Egy  $m$  egész osztható

|         |                                                       |
|---------|-------------------------------------------------------|
| 2-vel,  | ha utolsó jegye $\in \{0, 2, 4, 6, 8\}$               |
| 3-mal,  | ha a számjegyek összege osztható 3-mal                |
| 4-gyel, | ha a két utolsó jegyből képzett szám osztható 4-gyel  |
| 5-tel,  | ha utolsó jegye $\in \{0, 5\}$                        |
| 6-tal,  | ha 2-vel és 3-mal is osztható                         |
| 8-cal,  | ha a három utolsó jegyből képzett szám osztható 8-cal |
| 9-cel,  | ha a számjegyek összege osztható 9-cel                |
| 10-zel, | ha utolsó jegye 0                                     |
| 25-tel, | ha két utolsó jegye $\in \{00, 25, 50, 75\}$          |

**Prímszám** a  $p > 1$  egész, ha csak 1 és  $p$  az osztója  $\Leftrightarrow \text{fac}[p] = \{1, p\}$ .

$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \dots\}$  (lásd 10.9. táblázat, 94. oldal)

**Összetett** az  $m$  egész, ha 1-nél nagyobb és nem prímszám. (lásd 10.10. táblázat, 95. oldal)

→ Érdekes tudni az oszthatósági szabályokról, valamint a prímszám- és az összetett számok fogalmáról.

### 3.2.2. Műveletek egész számokkal

#### Összeadás:

Két azonos előjelű szám összeadásakor abszolútértékeik összegét a közös előjellel látjuk el.

Két különböző előjelű számot úgy adunk össze, hogy abszolútértékeik különbségét a nagyobb abszolútértékű szám előjelével látjuk el.

#### Kivonás:

A kivonandót ellenkező előjellel adjuk hozzá a kisebbítendőhöz.

#### Szorzás:

A tényezők abszolútértékeinek szorzatát az előjelszabály szerint előjelezzük.

Előjelszabály: egyező előjelűek szorzata pozitív, különbözőké negatív előjelet kap.

### 3.3. Racionális számok

#### 3.3.1. Műveletek racionális számokkal

**Reciprok érték** (multiplikatív inverz):  $x \cdot x' = 1 \Leftrightarrow x' = \frac{1}{x}, x \neq 0$ .

**Összeadás:**  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ .

**Kivonás:**  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ .

**Szorzás:**  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ .

**Osztás:**  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ .

### 3.4. Valós számok

#### 3.4.1. Exponenciális (lebegőpontos) alak: $x = m \cdot q^k$ .

Mantissza :=  $m \in \mathbb{Q}$ ,

Karakterisztika :=  $k \in \mathbb{Z}$ ,

A számrendszer alapja :=  $q$ .

**Normálalak:** olyan exponenciális alak, amelynél vagy a mantissza, vagy a karakterisztika az előírt tartományba esik:

|              |                                 |                                           |
|--------------|---------------------------------|-------------------------------------------|
| Tudományos   | a mantissza $\in [1; 10[$       | $25\,600 = 2,56 \cdot 10^4 = 2,56E + 4$   |
| Műszaki      | a karakterisztika 3 többszöröse | $25\,600 = 25,6 \cdot 10^3 = 25,6E + 3$   |
| Informatikai | a mantissza $\in [0,1; 1[$      | $25\,600 = 0,256 \cdot 10^5 = 0,256E + 5$ |

#### 3.4.2. Az összeadás és szorzás tulajdonságai

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

|                             |                 |                                            |
|-----------------------------|-----------------|--------------------------------------------|
| $a + b = b + a$             | $ab = ba$       | kommutativitás                             |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$ | $(ab)c = a(bc)$ | asszociativitás                            |
| $(a + b)c = ac + bc$        |                 | a szorzás disztributivitása az összeadásra |

→ Viszonylag ritkán, de előfordulhat olyan feladat, amelyben egy szám normálalakjával kell tudnunk számolni, erre láthatunk egy példát ezen az oldalon

### 3.4.3. Hatványok azonosságai

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall n, k \in \mathbb{Z}$

Pozitív egész kitevőjű hatvány:  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$  (lásd 10.2. táblázat, 78. oldal)

Negatív egész és 0 kitevőjű hatvány:  $a^{-n} := \frac{1}{a^n}; a^0 := 1.$

Racionális kitevőjű hatvány:  $a^{\frac{1}{k}} := \sqrt[k]{a}; a^{\frac{n}{k}} := \sqrt[k]{a^n}.$

**Azonos alapú hatványok:**

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}.$$

$$a^n : a^k = a^{n-k}.$$

$$(a^n)^k = (a^k)^n = a^{nk}.$$

**Azonos kitevőjű hatványok:**

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n.$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

$$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b). \quad a^3 + b^3 = (a^2 - ab + b^2)(a + b).$$

$$a^n - b^n = (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})(a - b).$$

$$a^{2k} - b^{2k} = (a^{2k-1} - a^{2k-2}b + a^{2k-3}b^2 - \dots \pm \dots - b^{2k-1})(a + b).$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \dots \pm \dots + b^{2k})(a + b).$$

**Többszörös hatványai:**

**Binomiális tétel:**

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

**A binomiális együtthatók:** (lásd 10.11. táblázat, 96. oldal)

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

**Faktoriális:** (lásd 10.13. táblázat, 97. oldal)

Jele: !, olvasd: faktoriális.

$$0! = 1, \forall n \in \mathbb{N}, n > 0: n! = (n-1)! \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

$$\text{Stirling-formula: } n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

→ Itt nagyon sok hasznos információt találhatunk, hiszen ha ismerjük a hatványkitevős alakba történő átalakítás módját, akkor sok munkát tudunk megtakarítani a használatával. Valamint a három sokszor megjelenő nevezetes azonosságot is itt találhatjuk.

### 3.4.4. Gyökök azonosságai

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+; \forall n, k \in \mathbb{Z}; n, k > 2.$$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

Racionális kitevőjű hatvány:  $a^{\frac{1}{k}} := \sqrt[k]{a}$ ;  $a^{\frac{n}{k}} := \sqrt[k]{a^n}$ .

**Azonos alapú gyökök:** (lásd 10.3. táblázat, 80. oldal)

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}.$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{k-n}}.$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}.$$

$$\sqrt[k]{a^n} = (\sqrt[k]{a})^n = a^{\frac{n}{k}}.$$

**Azonos kitevőjű gyökök:**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}.$$

### 3.4.5. Logaritmusok azonosságai (lásd 10.4. táblázat, 84. oldal)

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$a^{\log_a b} = b.$$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

**Azonos alapú logaritmusok:**

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

$$\log_a (x^n) = n \cdot \log_a x.$$

$$\log_a a = 1.$$

$$\log_a (x : y) = \log_a x - \log_a y.$$

$$\log_a (\sqrt[n]{x}) = (\log_a x) : n.$$

$$\log_a 1 = 0.$$

**Különböző alapú logaritmusok:**

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b a \cdot \log_a x.$$

$$\lg x = \log_{10} x.$$

$$\ln x = \log_e x.$$

$$\lg x = M \cdot \ln x \approx 0,43429 \cdot \ln x.$$

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x \approx 2,30259 \cdot \lg x.$$

## 3.5. Komplex számok

### 3.5.1. Képzetes (imaginárius) számok

**Képzetes egység:** az  $x^2 = -1$  egyenlet egyik gyöke. Jelölése:  $i = \sqrt{-1}$ .

A képzetes számok halmaza:  $\mathbb{I} = \{bi \mid b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$

A képzetes egység hatványai:

|              | $\forall n \in \mathbb{N}$ | $\varphi$   |
|--------------|----------------------------|-------------|
| $i^{4n} =$   | +1                         | $0^\circ$   |
| $i^{4n+1} =$ | $i$                        | $90^\circ$  |
| $i^{4n+2} =$ | -1                         | $180^\circ$ |
| $i^{4n+3} =$ | $-i$                       | $270^\circ$ |

- Ezen az oldalon találjuk a logaritmus azonosságokat, amelyek szintén gyakran meg szoktak jelenni.
- Továbbá a gyökvonás azonosságai is itt vannak, viszont ha megtanuljuk hogyan kell átalakítani hatványkitevős alakká, akkor sok esetben nem is kell használnunk őket.

## 4. ALGEBRA

### 4.1. Sorozatok, sorok

#### 4.1.1. Alapfogalmak, tulajdonságok

##### Jelölések:

a sorozat:  $\{a_k\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$

kezdő szelete:  $\{a_k\}_n = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .

##### Elnevezések:

$a_n, a_k$  – a sorozat *tagjai*.

$n, k$  – az  $a_n, a_k$  tagok *indexe*.

$S_n$  – az első  $n$  tag *összege*.

**Sor:**  $\{S_n\} = S_1, S_2, S_3, \dots$  – a részletösszegek sorozata.

##### Sorozatok típusai, tulajdonságai:

|                                             |                             |
|---------------------------------------------|-----------------------------|
| $\forall k: a_k > 0$                        | pozitív definit,            |
| $\forall k: a_k < 0$                        | negatív definit,            |
| $\forall k: a_k \leq a_{k+1}$               | monoton növekvő,            |
| $\forall k: a_k < a_{k+1}$                  | szigorúan monoton növekvő,  |
| $\forall k: a_k \geq a_{k+1}$               | monoton csökkenő,           |
| $\forall k: a_k > a_{k+1}$                  | szigorúan monoton csökkenő, |
| $(a_k - a_{k-1}) \cdot (a_{k+1} - a_k) < 0$ | oszcilláló (váltakozó).     |

#### 4.1.2. Nevezetes sorozatok

|                      | Számtai sorozat                     | Mértani sorozat                                                                             |
|----------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| Általános tag        | $a_n = a_1 + (n - 1)d$              | $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$                                                                   |
| Képzési szabály      | $a_n = a_{n-1} + d$                 | $a_n = a_{n-1} \cdot q$                                                                     |
| Első $n$ tag összege | $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ | $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$<br>$S_n = n \cdot a_1, \text{ ha } q = 1$ |
| Középek ( $k < n$ )  | $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ | $ a_n  = \sqrt{a_{n+k} \cdot a_{n-k}}$                                                      |

$d$  (differencia) a számtani sorozat különbsége, állandó.

$q$  (kvóciens) a mértani sorozat hányadosa, állandó.

##### A végtelen mértani sor összege:

konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$ , ha  $|q| < 1$ , különben  $S_n$  nem korlátos.

→ A számtani és a mértani sorozatokra vonatkozó fontosabb szabályok.

#### 4.1.3. Középértékek

|                    |                                                                                                                                                    |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Aritmetikai közép: | $A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$                                                                               |
| Geometriai közép:  | $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$                                                                  |
| Harmonikus közép:  | $\frac{n}{H} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}; \quad H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$ |
| Négyzetes közép:   | $Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}}$                                                         |

A közepek kapcsolata (pozitív tagú sorokra):

Ha minden tag azonos, akkor  $H = G = A = Q$ ,

különben  $H < G < A < Q$ .

#### 4.2. Kamatszámítás

##### 4.2.1. Egyszeri kamat

$T$  összeg (tőke, betét, kölcsön) évi  $p\%$ -os kamata:  $k = T \cdot \frac{p}{100}$ .

Kamattényező  $p\%$ -os kamatlábnál:  $q = \frac{100+p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$ .

$T$  összeg  $p\%$ -os kamattal felnövekedett értéke:  $T + k = T \cdot q$ .

##### 4.2.2. Kamatos kamat

A  $T_0$  induló tőke  $n$  év alatt felnövekedett értéke:  $T_n = T_0 \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ .

A  $T_0$  induló tőke  $n$  év alatt amortizálódott értéke:  $T_n = T_0 \cdot \left(\frac{100-p}{100}\right)^n$ .

A  $T_n$  összeg évi  $p\%$ -kal diszkontált értéke:  $T_0 = T_n \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right)^n$ .

Az  $a$  járadék  $n$  év alatt felnövekedett értéke:  $S_n = \frac{100a}{p}(q^n - 1)$ .

- Az aritmetikai és a geometria középről jó tudni, hogy a számtani közepet (hétköznapiabb nevén átlagot) és mértani közepet jelentik.
- Találhatunk itt összefüggést a kamatszámításra vonatkozóan is, viszont úgy gondolom, hogy vannak ezeknél könnyebben megjegyezhető módszerek is.

#### 4.2.3. Járadék, kölcsön

Az  $a$  járadéknak az  $n$ -edik év végére felnövekedett értéke,

ha a befizetés minden év *elején* esedékes:  $S_n = aq \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$ .

ha a befizetés minden év *végén* esedékes:  $S_n = S_n^* = a \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$ .

A  $T$  hitel törlesztésének évi részlete (annuitás),

ha a törlesztés minden év *végén* esedékes:  $A = \frac{T}{100} \cdot \frac{q^n \cdot p'}{q^n - 1}$ .

#### 4.3. Kombinatorika

|                    | Ismétlés nélküli                                      | Ismétléses                                                                           |
|--------------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Permutációk</b> | $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ,  | $P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ . |
| <b>Kombinációk</b> | $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ , | $C_n^k(\text{ism}) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$ .          |
| <b>Variációk</b>   | $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ,                         | $V_n^k(\text{ism}) = n^k$ .                                                          |

#### 4.4. Egyenletek

##### 4.4.1. Alapfogalmak, elnevezések

Az egyenletben szereplő kifejezés:

**Algebrai**, ha az  $x$  ismeretlen csak  $(+, -, \cdot, /, x^n, \sqrt[n]{x})$  műveletekben szerepel,

**racionális egész**: az ismeretlen csak  $(+, -, \cdot, x^n)$  műveletekben szerepel.

**racionális tört**: az előbbieket mellett az ismeretlennel való osztás is szerepel.

**irracionális**: az ismeretlen adott törtkitevős hatványa (gyöke) is szerepel.

**Transzcendens** (nem algebrai), ha logaritmikus, exponenciális, trigonometrikus stb. kifejezésekben is szerepel az ismeretlen.

##### 4.4.2. Algebrai egyenletek

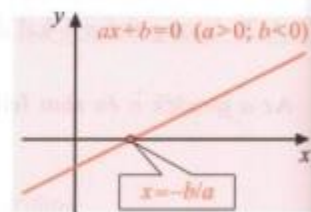
**Kanonikus polinomalak**:  $P^n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ .

**Elsőfokú egyenlet**

Kanonikus alak:  $ax + b = 0$ .

Redukált alak:  $x + p = 0$ ,  $p = \frac{b}{a}$ .

Gyöke:  $x = -\frac{b}{a} = -p$ .



→ A kombinatorikus képleteket érdemes ismerni, viszont kiszámításuk szinte minden esetben számológéppel történik, így az  $n$  faktoriális és az  $n$  alatt a  $k$  billentyűk helyét célszerű észben tartani a gépünkön

→ Közép szintű érettségien az ismétléses kombinációra nem lesz szükségünk

### Másodfokú egyenlet

Kanonikus alak:  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Redukált alak:

$$x^2 + px + q = 0, \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$$

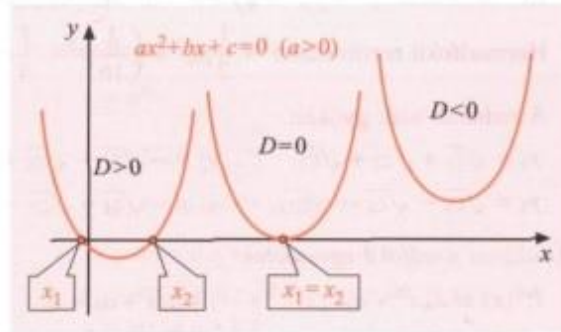
Diszkrimináns:

$$D = b^2 - 4ac, \quad D^* = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Ha  $D > 0$ : két valós gyök.

Ha  $D = 0$ : két egyező valós gyök.

Ha  $D < 0$ : két komplex gyök.



Megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

$$\text{Gyökök: } x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{p}{2} + \sqrt{D^*}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{p}{2} - \sqrt{D^*}.$$

A gyökök és együtthatók kapcsolata (Viète-formulák):

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = q, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} = -\frac{p}{q}.$$

### Harmadfokú egyenlet

Kanonikus alak:  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ .

Redukált alak:  $y^3 + 3py + 2q = 0$ , az  $x = y - \frac{b}{3a}$  helyettesítés után.

Diszkrimináns:  $D = q^2 + p^3$ .

Ha  $D < 0$ : három különböző valós gyök (casus irreducibilis).

Ha  $D = 0$ : három valós gyök (egyik kétszeres).

Ha  $D > 0$ : egy valós és két komplex gyök.

**Cardano-formula** az  $u$ ,  $v$  segédváltozókra:  $u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}}$ ,  $v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}$ .

A redukált alak gyökei:

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \quad y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v, \quad \varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i.$$

Gyökök és együtthatók kapcsolata (Viète-formulák):

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}.$$

- A másodfokú egyenlet megoldóképletét régen álunkból keltve is illett tudnunk, viszont ha elég okos a számológépünk, akkor már az ezzel való bajlódást is elkerülhetjük, hiszen az érettségin elegendő csak a gyököket megadnunk a teljes pontszámért.

- Néhány esetben viszont hasznosnak bizonyulhat a gyöktényezőző alak ismerete is:

$$a(x-x_1)(x-x_2)$$

## 4.5. Egyenletrendszerek

### 4.5.1. Lineáris egyenletrendszer (két ismeretlennel)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Helyettesítő módszer:

$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1} \Rightarrow a_2 \frac{c_1 - b_1y}{a_1} + b_2y = c_2.$$

Kiküszöbölés módszere:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{c_1 - b_1y}{a_1} \\ x &= \frac{c_2 - b_2y}{a_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{c_1 - b_1y}{a_1} = \frac{c_2 - b_2y}{a_2}.$$

Egyenlő együtthatók módszere:

$$\left. \begin{aligned} a_1a_2x + b_1a_2y &= c_1a_2 \\ -a_1a_2x - b_2a_1y &= -c_2a_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (b_1a_2 - b_2a_1)y = (c_1a_2 - c_2a_1).$$

## 5. VALÓS FÜGGVÉNYTAN

Az itt szereplő függvényeket a valós számok halmazából a valós számok halmazába leképező képletekkel,  $y = f(x)$  alakban adom meg. A  $D$ -vel jelölt értelmezési tartományt is megadom ott, ahol az nem egyezik a teljes valós számhalmazzal.

### 5.1. Fontosabb valós függvények

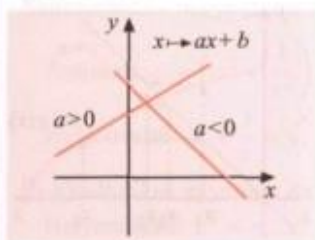
#### 5.1.1. Racionális egész függvények

**Hatványfüggvény:**  $y = x^n$ ;  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

**Polinomfüggvény:**  $y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ;  $\forall i: a_i \in \mathbb{R}$ .

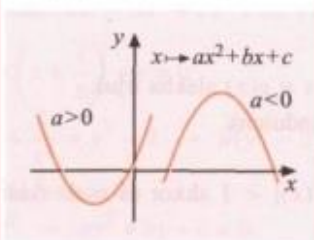
**Elsőfokú polinomfüggvény:**

$$y = ax + b;$$
$$a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$



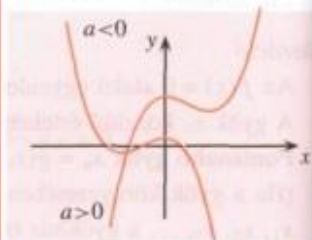
**Másodfokú polinomfüggvény:**

$$y = ax^2 + bx + c;$$
$$a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$



**Harmadfokú polinomfüggvény:**

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$
$$a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$



- Ezen és a következő oldalakon a fontosabb függvények képét találhatjuk. A legfontosabb közülük a másodfokú függvény parabolája, amelyet legtöbbször egyenlőtlenségek megoldása során használhatunk fel.
- Bár nem mondom, hogy a többi függvény képét felesleges ismernünk, de az abszolútértékfüggvényt leszámítva nagy valószínűséggel nem lesz rájuk szükségünk, vagy el tudjuk kerülni a használatukat.

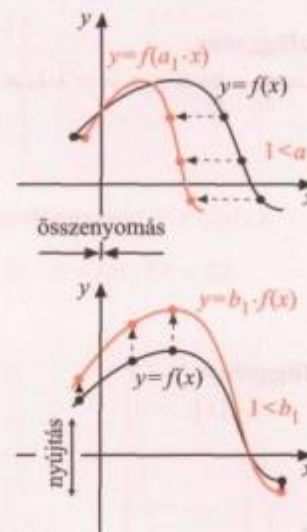
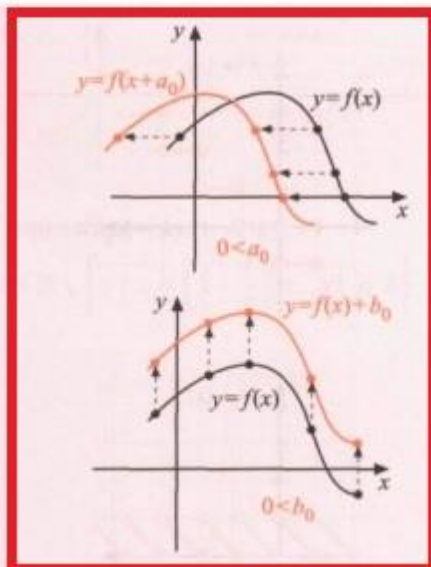
### 5.1.7. Függvénytranszformációk

Az  $y = f(x)$  függvény lineáris transzformáltjai:

$$y = b_1 \cdot f(a_1 x + a_0) + b_0.$$

Ezeket a következő négy elemi transzformáció kombinálásával kapjuk:

|                                  | Hozzárendelés        | A grafikon geometriai transzformációja                                                                                                                                                    |
|----------------------------------|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A változó transzformációja       | $y = f(x + a_0)$     | Eltolás az $x$ tengely mentén $(-a_0; 0)$ vektorral.                                                                                                                                      |
|                                  | $y = f(a_1 \cdot x)$ | Az $y$ tengelyre merőleges, $\frac{1}{a_1}$ arányú affinitás.<br>(Összenyomás, ha $ a_1  > 1$ , nyújtás ha $ a_1  < 1$ .)<br>Ha $a_1 = -1$ , a függvény képe az $y$ tengelyre tükröződik. |
| A függvényérték transzformációja | $y = f(x) + b_0$     | Eltolás az $y$ tengely mentén $(0; b_0)$ vektorral.                                                                                                                                       |
|                                  | $y = b_1 \cdot f(x)$ | Az $x$ tengelyre merőleges, $b_1$ arányú affinitás.<br>(Összenyomás, ha $ b_1  < 1$ , nyújtás ha $ b_1  > 1$ .)<br>Ha $b_1 = -1$ , a függvény képe az $x$ tengelyre tükröződik.           |



A  $b_1 \cdot f(a_1 x + a_0) + b_0$  függvény egy lehetséges ábrázolása az  $f(x)$  függvény segítségével

lépésről lépésre:  $b_1 f(a_1 x + a_0) + b_0 = b_1 f \left[ a_1 \left( x + \frac{a_0}{a_1} \right) \right] + b_0$ , tehát

$$f(x) \rightarrow f \left( x + \frac{a_0}{a_1} \right) \rightarrow f \left[ a_1 \left( x + \frac{a_0}{a_1} \right) \right] = f(a_1 x + a_0) \rightarrow b_1 \cdot f(a_1 x + a_0) \rightarrow b_1 \cdot f(a_1 x + a_0) + b_0.$$

Ettől eltérő sorrendben más megfontolásokat kell alkalmazni.

→ Amennyiben függvényt kell transzformálnunk (tologatnunk), úgy a fenti dolgokat jó ismernünk.

### 6.3. Valószínűség

#### 6.3.1. Definíciók

Az  $E \subseteq \wp(\Omega)$  esemény valószínűsége egy olyan  $P(E) = p_E \in [0; 1] \subseteq \mathbb{R}$  szám, amelyet a nagyszámú kísérletben az esemény  $f_E$  relatív gyakorisága megközelít.

**Kolmogorov-axiómák:**

(I.) – a biztos esemény valószínűsége 1;  $P(\Omega) = 1$ .

(II.) – az egymást páronként kizáró események valószínűsége összeadódik;

$$\forall i \neq j : E_i \cap E_j = O \Rightarrow P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) = \sum_{k=1}^m P(E_k).$$

**Klasszikus valószínűségi mező:**

– ha az  $\Omega$  eseménytér véges

– és az elemi események valószínűsége egyenlő:  $P(\varepsilon_1) = \dots = P(\varepsilon_n)$ , akkor

a) az elemi események valószínűsége a számuk reciproka;  $\forall k: P(\varepsilon_k) = \frac{1}{n}$ .

b) az  $E$  esemény valószínűsége a kedvező és a lehetséges kimenetek számának hányadosa;

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \cdot \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$$

Függetlenek az  $A$  és  $B$  események, ha  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

**Feltételes valószínűség:** az  $E$  eseménynek az  $F \neq O$  eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűsége

$$P(E | F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

#### 6.3.2. Alapvető összefüggések

A lehetetlen esemény valószínűsége zérus;  $P(O) = 0$ .

A komplementer események valószínűségének összege;

$$\forall E \in \wp(\Omega): P(E) + P(\overline{E}) = 1.$$

Ha  $E_1, E_2, \dots, E_m$  teljes eseményrendszer, akkor  $\sum_{k=1}^m P(E_k) = 1$ .

Az összes  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  elemi eseményre:

$$\sum_{k=1}^n P(\varepsilon_k) = 1.$$

Tetszőleges eseményekre:  $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) \leq \sum_{k=1}^m P(E_k)$ .

→ Oldalakon keresztül böngészhetjük a valószínűségszámítás témakörébe tartozó képleteket, de a legtöbb feladathoz elegendő ismernünk a *kedvező/összes* összefüggést.

## 7.2. Mintafüggvények, statisztikák

### 7.2.1. Közepek, átlagok

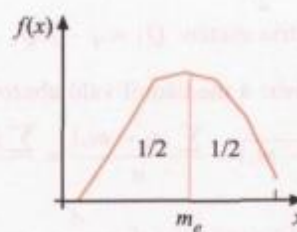
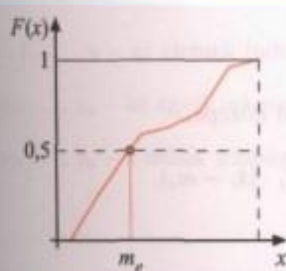
|                             |                                                                                                                                                             |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Aritmetikai közép           | $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$                                                                           |
| Súlyozott aritmetikai közép | $x' = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + \dots + s_n x_n}{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i x_i}{\sum_{i=1}^n s_i}.$                 |
| Geometriai közép            | $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$                                                                |
| Harmonikus közép            | $H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}; \quad \frac{n}{H} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$ |
| Négyzetes közép             | $Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}.$                                                         |

Mintaközép, standard középérték:

az adatsorból számolva:  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}.$

a gyakorisági sorokból:  $\bar{x} = \frac{\sum g_i \bar{x}_i}{\sum g_i} = \sum f_i \bar{x}_i.$

**Medián –  $m_e$ :** a nagyság szerint rendezett adatsor  
 – középső eleme, ha  $n$  páratlan;  
 – a két középső elem átlaga, ha  $n$  páros.

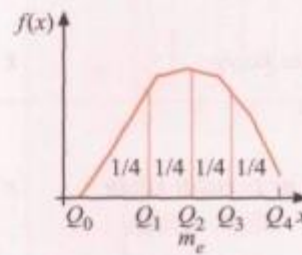
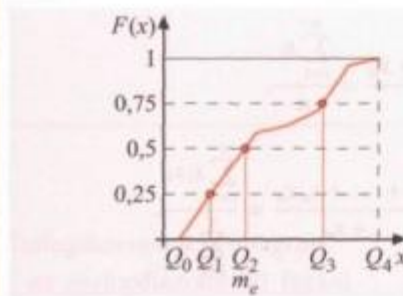


→ A statisztika feladatok három dologra szoktak rákérdezni, a mediánra, a móduszra és a terjedelemre (valamint az átlagra, de azt szinte minden nap számolni szoktuk). Ha ezeket a fogalmakat ismerjük, nagy meglepetés nem érhet, és nem melleleg könnyű pontokat szerezhethünk velük.

**Percentilisek** –  $P_1, P_2, \dots, P_{99}$ : a rendezett adatsort 100 egyenlő részre tagolják.

**Kvartilisek** –  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ : a rendezett adatsort 4 egyenlő részre tagolják.

$$[\min(x_i) = A = Q_0, \quad Q_4 = F = \max(x_i) \text{ és } m_e = Q_2]$$



**Kvartilisközép:**  $q = \frac{Q_1 + Q_3}{2}$ .

**Módus** –  $m_0$ : a rendezett gyakorisági sor maximumhelye.

vagyis amiből a legtöbb van

**Modális köz:** osztályköz/intervallum, amelybe a legnagyobb adat, gyakoriság esik.

**Nyersmódus** –  $x_0$ : a modális köz közepe.

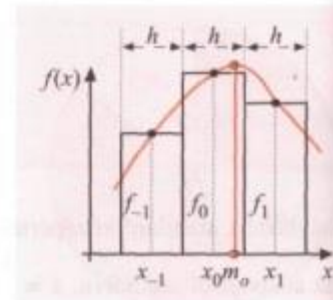
A módus helyesbítése parabolikus interpolációval:

$$m_0 = x_0 - \frac{f_{+1} - f_{-1}}{2(f_{-1} - 2f_0 + f_{+1})} \cdot h,$$

$h$  az osztályközök szélessége,

$f_0$  a modális köz relatív gyakorisága,

$f_{-1}$  és  $f_{+1}$  a két szomszédos köz gyakorisága.



### 7.3. A szóródás jellemzői

**Terjedelem:** a legnagyobb és a legkisebb adat különbsége,

$$F - A = \max(x_i) - \min(x_i).$$

**Kvartilisel térés:** a felső és az alsó kvartilis különbségének fele,

$$dQ = \frac{Q_3 - Q_1}{2}.$$

$$\text{Szimmetria esetén: } Q_1 = q - dQ, \quad Q_3 = q + dQ.$$

**Középel térés:** a mediántól való abszolút eltérések számtani közepe,

$$d = \overline{|x_i - m_e|} = \frac{\sum |x_i - m_e|}{n} = \frac{\sum g_i \cdot |\bar{x}_i - m_e|}{\sum g_i} = \sum f_i \cdot |\bar{x}_i - m_e|.$$

$$\text{Relatív középeltérés: } d' = \frac{d}{m_e}.$$

Variancia (szórásnégyzet), a mintaközéptől való eltérések négyzetes közepe

$$s^2 = \overline{(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum g_i \cdot (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{\sum g_i} = \sum f_i \cdot (\bar{x}_i - \bar{x})^2.$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{\sum g_i \cdot \bar{x}_i^2}{\sum g_i} - (\bar{x})^2 = \sum f_i \cdot \bar{x}_i^2 - (\bar{x})^2.$$

Az  $\bar{x}$  az átlagot jelenti  
Ha az eredményből  
gyököt vonunk, akkor a  
szórást kapjuk

Szórás: a variancia négyzetgyöke

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{(\bar{x}^2) - (\bar{x})^2}.$$

$$\text{Relatív szórás: } s' = \frac{s}{\bar{x}}.$$

#### 7.4. Szimmetria és lapultság

A ferdeség (aszimmetria) gyakorlatban használt mérőszámai:

$$g = \frac{\bar{x} - m_0}{s} \text{ és } g' = \frac{q - m_e}{dQ}.$$

Negatív értékek jobb oldali, pozitív értékek bal oldali aszimmetriát jeleznek.

A lapultság gyakorlatban használt mérőszáma:

$$l = \frac{(\bar{x}_i - \bar{x})^4}{s^4}.$$

A normális eloszlásnál  $l = 3$ ;

az  $l > 3$  ennél csúcsosabb,

az  $l < 3$  pedig laposabb eloszlást jelez.

#### 7.5. Korreláció, regresszió

A statisztikai modell: az adatsor a minta elemeinek két ismervét tartalmazza.

Matematikai modell: a mérés a minta  $i$ -edik eleméhez hozzárendeli a sík egy pontját –

$$\{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad i \mapsto (x_i, y_i).$$

##### 7.5.1. Általános jelölések

$1, 2, \dots, i, \dots, n$  – az elemek indexe,

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  – az egyik adatsor elemei,

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  – a másik adatsor elemei.

→ Ritkán, de előfordulhat a szórásra vonatkozó kérdés is, ezt a fenti képlet négyzetgyökeként kaphatjuk meg.

## 8.4. Síkgeometria

### 8.4.1. Elemi geometriai tételek

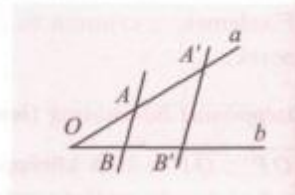
#### Párhuzamos szelők tételei:

Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor  
– az egyik száron keletkező metszetek aránya megegyezik a másik száron levő megfelelő metszetek arányával:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB};$$

– a párhuzamosokból a szögcsúcsok által kimetszett szakaszok aránya megegyezik végpontjuk szögcsúcsától mért távolságának arányával:

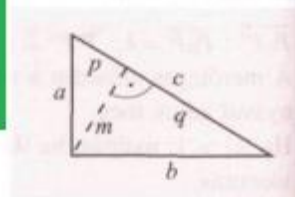
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}.$$



#### Pitagorasz tétele

A derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege az átfogó négyzetével egyenlő:

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (\text{lásd 10.12. táblázat, 96. oldal})$$



#### Befogótétel (Eukleidész tétele)

A derékszögű háromszögben a befogó az átfogóra eső merőleges vetületének és az átfogónak a mértani közepe:

$$a^2 = p \cdot c, \quad b^2 = q \cdot c.$$

#### Magasságtétel (Eukleidész tétele)

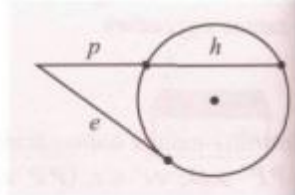
A derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek mértani közepe:

$$m^2 = p \cdot q.$$

#### A kör érintője és szelője közötti kapcsolat

Egy külső pontból a körhöz húzott érintő hossza mértani közepe az e pontból húzott szelő két szeletének:

$$e^2 = p \cdot (p + h).$$



→ A Pitagorasz tétel már 8. osztály óta kísért minket, viszont akár a sík-, akár a térgeometria feladatoknál nagy hasznát vehetjük.

#### 8.4.5. Síkidomok kerülete ( $K$ ), területe ( $T$ )

A képletekben az  $a, b, c, \dots$  változók az idomok oldalainak,  $m$  a magasságnak,  $r$  a beírt,  $R$  a körülírt kör sugarának, az  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  a szögeknek a mérőszámát jelölik. A fel nem sorolt jelölések értelmezésében az ábra ad segítséget. A képletekben  $\bar{\alpha}$ , illetve  $\alpha^\circ$  az  $\alpha$  szög radiánban, illetve fokban mért értékét jelöli.

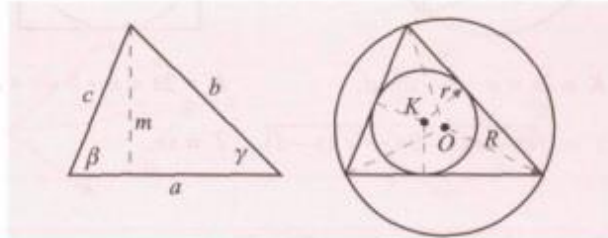
Háromszög:

$$K = 2s = a + b + c.$$

$$T = \frac{am}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{abc}{4R} = sr.$$

Héron-képlet:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

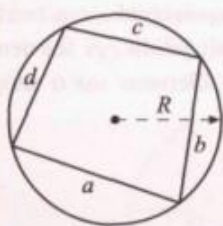
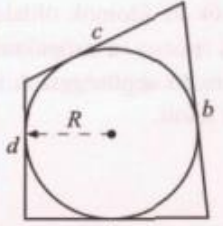
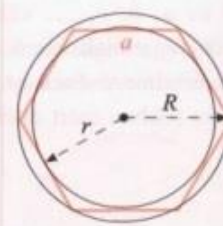
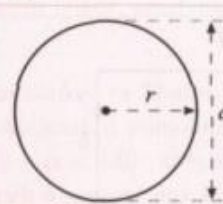
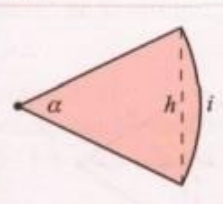
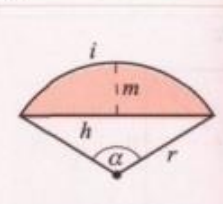
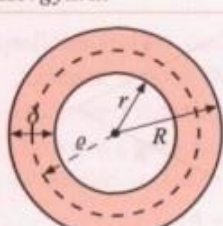
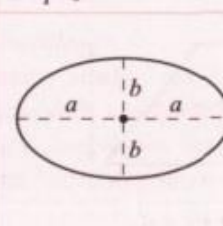
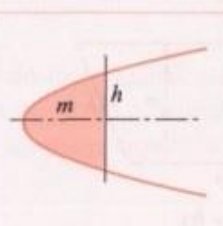


| Négyzet:                   | Rombusz:                              | Téglalap:       |
|----------------------------|---------------------------------------|-----------------|
|                            |                                       |                 |
| $K = 4a,$                  | $K = 4a,$                             | $K = 2(a + b),$ |
| $T = a^2 = \frac{d^2}{2}.$ | $T = \frac{ef}{2} = a^2 \sin \alpha.$ | $T = ab.$       |

| Paralelogramma:            | Trapéz:                       | Deltoid:            |
|----------------------------|-------------------------------|---------------------|
|                            |                               |                     |
| $K = 2(a + b),$            | $K = a + b + c + d,$          | $K = 2(a + b),$     |
| $T = am = ab \sin \alpha.$ | $T = \frac{a + c}{2} m = km.$ | $T = \frac{ef}{2}.$ |

- Ez a négyjegyű egyik legfontosabb oldala, az itt látható trigonometrikus területképletet szinte az összes síkgeometriai feladatnál használnunk kell. Továbbá tartsuk észben, hogy ha a feladat a köré- vagy a belé írható kör sugarára kérdez rá, akkor a fenti képletek valamelyikét kell nagy valószínűséggel használnunk.
- Ugyanúgy a négyszögek területképleteinek helyét is érdemes tudnunk.

|                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Húrnégyszög:</p>  <p> <math>K = 2s = a + b + c + d,</math><br/> <math>T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.</math> </p>                                                              | <p>Érintőnégyyszög:</p>  <p> <math>K = 2s = a + b + c + d,</math><br/> <math>T = sr.</math> </p>                                                                                                                                     | <p>Szabályos n-szög:</p>  <p> <math>K = na,</math><br/> <math>T = \frac{nR^2 \sin \alpha}{2} = \frac{nar}{2}; \alpha = \frac{360^\circ}{n}</math> </p>           |
| <p>Kör:</p>  <p> <math>K = 2\pi r = \pi d,</math><br/> <math>T = \pi r^2 = \frac{d^2 \pi}{4}.</math> </p>                                                                          | <p>Körcikk:</p>  <p> <math>i = \widehat{\alpha} \cdot r = \frac{\alpha^\circ \cdot r \cdot \pi}{180^\circ},</math><br/> <math>T = \frac{1}{2}ir = \frac{\widehat{\alpha}r^2}{2} = \frac{\pi \alpha^\circ}{360^\circ}r^2.</math> </p> | <p>Körszelet:</p>  <p> <math>m = r - \frac{\sqrt{4r^2 - h^2}}{2} = r - r \cdot \cos \frac{\alpha}{2}</math><br/> <math>T = \frac{ir - h(r - m)}{2}.</math> </p> |
| <p>Körgyűrű:</p>  <p> <math>K = 2\pi(R + r),</math><br/> <math>T = \pi(R^2 - r^2) = 2\pi \varrho \delta,</math><br/> <math>\delta = R - r, \varrho = \frac{R + r}{2}</math> </p> | <p>Ellipszis:</p>  <p> <math>T = \pi ab.</math> </p>                                                                                                                                                                               | <p>Parabolaszelet:</p>  <p> <math>T = \frac{2}{3}hm.</math> </p>                                                                                              |

→ A kör terület és kerületképletét szinte biztosan használnunk kell majd az érettségin, valamint nagyon ritkán, de a körcikkre vonatkozó ismeretekre is szükségünk lehet.

## 8.5. Vektorszámítás

### 8.5.1. Műveletek vektorokkal

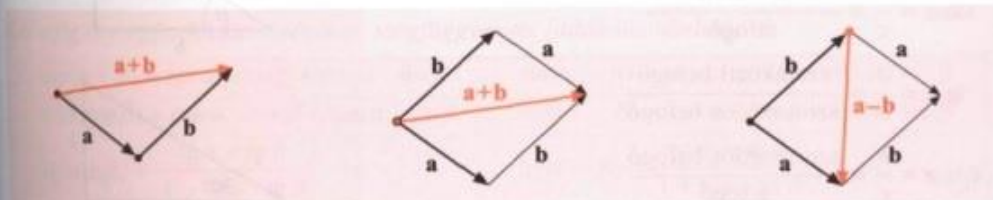
Összeadás-kivonás:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \text{kommutatív.}$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad \text{asszociatív.}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$



Szorítás skalárral:

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \Rightarrow |\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| \wedge \mathbf{b} \parallel \mathbf{a}.$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \quad \text{disztributív a vektorösszeadásra.}$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}, \quad \text{disztributív a skalárösszeadásra.}$$

$$(\lambda \mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu \mathbf{a}) = \mu(\lambda \mathbf{a}), \quad \text{kommutatív a skalárszorzásra.}$$

Egységvektor (a irányú egységvektor):

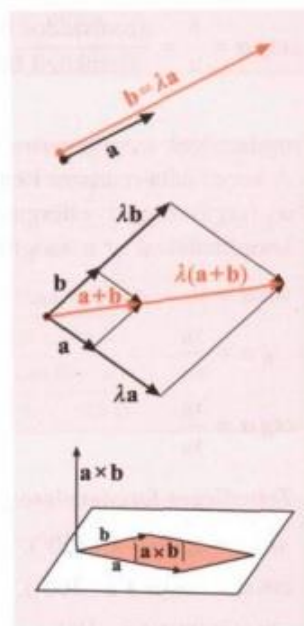
$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{a} \Rightarrow |\mathbf{a}^0| = 1.$$

$$\text{Skaláris szorzat: } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\mathbf{a}; \mathbf{b})_{<},$$

vektoriális szorzat (csak térben!):

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\mathbf{a}; \mathbf{b})_{<};$$

$$\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}.$$



### 8.5.2. Vektorok koordinátái (síkban)

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{a} = a(x; y), \quad (x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Műveletek

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j}.$$

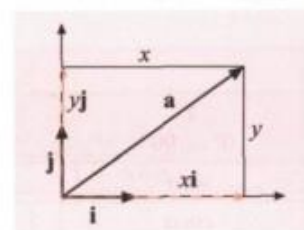
$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = (x_1 - x_2)\mathbf{i} + (y_1 - y_2)\mathbf{j}.$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda x \mathbf{i} + \lambda y \mathbf{j}.$$

$$\text{Abszolútérték: } |\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Egységvektor: } \mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\text{Skaláris szorzat: } \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$



- Ha két vektor által közre zárt szöget kell számolnunk, akkor biztosan a skaláris szorzat kell nekünk. Legtöbbször a két egyenlet jobb oldalait tesszük egyenlővé egymással. Érdekes tudni továbbá azt is, hogy amennyiben két vektor merőleges egymásra, úgy a skaláris szorzatuk 0 lesz. (Az újabb kiadású könyvekben az oldal alján levő képlet átcsúszhat a következő lapra.)

## 8.6. Trigonometria

8.6.1. Szögfüggvények (lásd 10.5. táblázat, 88. oldal, 10.6., 10.7. táblázatok, 90. oldal)

A derékszögű háromszögben az  $\alpha$  hegyesszög szögfüggvényei:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{szemközti befogó}}{\text{szomszédos befogó}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{szomszédos befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{szomszédos befogó}}{\text{szemközti befogó}}$$

Forgásszögek szögfüggvényei:

A koordináta-rendszer  $i$  egységvektorából tetszőleges  $\alpha$  forgásszöggel elforgatott  $e(x_0; y_0)$  egységvektor koordinátáival az  $\alpha$  szögfüggvényei:

$$\sin \alpha = y_0, \quad \cos \alpha = x_0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{x_0}, \quad \text{ha } x_0 \neq 0$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x_0}{y_0}, \quad \text{ha } y_0 \neq 0$$

Tetszőleges forgásszögre:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ),$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ),$$

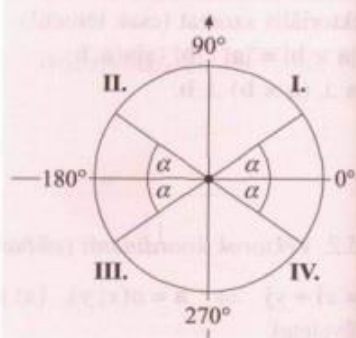
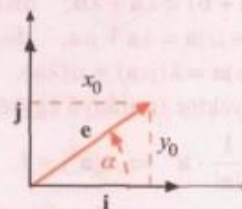
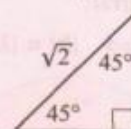
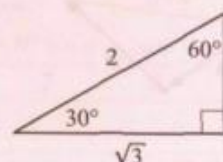
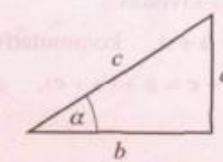
$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 180^\circ),$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$



| I.<br>$0^\circ \dots 90^\circ$ | II.<br>$90^\circ \dots 180^\circ$         | III.<br>$180^\circ \dots 270^\circ$      | IV.<br>$270^\circ \dots 360^\circ$        |
|--------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\sin \alpha$                  | $\sin(180^\circ - \alpha)$                | $-\sin(\alpha - 180^\circ)$              | $-\sin(360^\circ - \alpha)$               |
| $\cos \alpha$                  | $-\cos(180^\circ - \alpha)$               | $-\cos(\alpha - 180^\circ)$              | $\cos(360^\circ - \alpha)$                |
| $\operatorname{tg} \alpha$     | $-\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$  | $\operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ)$  | $-\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)$  |
| $\operatorname{ctg} \alpha$    | $-\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$ | $\operatorname{ctg}(\alpha - 180^\circ)$ | $-\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$ |

→ Főként térgeometriai feladatoknál szoktunk derékszögű háromszög alakú síkmetszeteket kapni, ezek szögeinek meghatározásához pedig szükségünk van a szinusz, a koszinusz és ritkább esetben a tangens definíciójára.

## 8.6.2. Trigonometriai összefüggések

Összefüggések egy szög különböző szögfüggvényei között:

|                                                              |                                                                    |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$                          | $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$     |
| $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$                      | $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$ |
| $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ | $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$      |

Két szög összegének/különbségének szögfüggvényei (addíciós tételek):

|                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$                                                                             | $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$                                                                             |
| $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$                                                                             | $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$                                                                             |
| $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$      | $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$      |
| $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$ | $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$ |

Két szögfüggvény összegének/különbségének szorzattá alakítása:

|                                                                                                                    |                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$                   | $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$                   |
| $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$                   | $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$                  |
| $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$   | $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$   |
| $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$ | $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$ |

Kétszeres szögek szögfüggvényei:

|                                                                                                                      |                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ | $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ |
| $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$                      | $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$                     |

Félszögek szögfüggvényei:

|                                                                                                                        |                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$                                                                  | $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$                                                                   |
| $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ | $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$ |

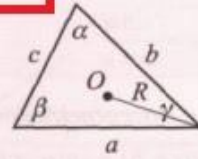
- Az érettségien kapott trigonometrikus egyenletek sok esetben vezethetnek vissza egy másodfokú egyenletre, előtte viszont szükségünk lehet a négyzetes tag cseréjére a fenti képlet átrendezésével

### 8.6.3. A háromszögek tételei

**Szinusztétel:**  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ , ahol  $R$  a körülírt kör sugara.

**Koszinusztétel:**  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .

**Tangenstétel:**  $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}$ .



### 8.7. Térgeometria

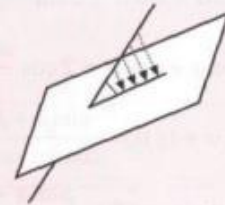
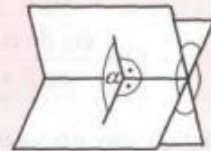
#### 8.7.1. Alapfogalmak, tételek

**Lapszög:** két metsző sík a teret négy tartományra bontja.

Egy ilyen tartomány a határoló félsíkokkal alkotja a lapszöget.

**Két sík hajlásszöge** a metszésvonalukra emelt merőlegesek hajlásszöge.

**Egyenes és sík hajlásszöge** az egyenes és síkra merőleges vetületének hajlásszöge.

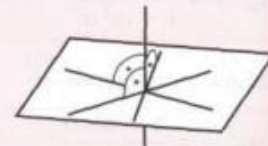


**Kitérő egyenesek hajlásszöge** a velük párhuzamos metszők hajlásszöge.



**Síkra merőleges egyenes tétele:**

Ha egy egyenes merőleges a sík két metsző egyenesére, akkor a síkra (annak minden egyenesére) merőleges.



#### 8.7.2. Testek felszíne ( $A$ ), térfogata ( $V$ )

A képletekben az  $a, b, c, \dots$  változók a testek oldaléleinek vagy alkotóinak,  $m$  a test magasságának,  $T$  az alaplapp területének,  $P$  a palást felszínének a mérőszámát jelölik. Az itt fel nem sorolt jelölések értelmezésében az ábra ad segítséget.

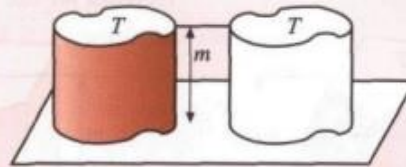
→ A szinusz- és a koszinusztételeket biztosan használnunk kell majd, ha síkgeometriai feladatot kapunk. Valamint a szinusztétel segítségével a háromszög köré írható körének sugarát is meghatározhatjuk.

## Hengerek

Egyenes henger:

$$A = 2T + km,$$

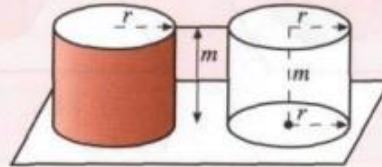
$$V = Tm.$$



Forgáshenger:

$$A = 2\pi r(r + m),$$

$$V = \pi r^2 m.$$

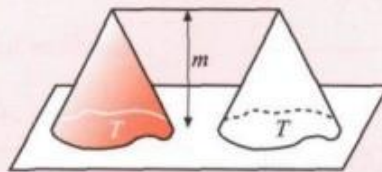


## Kúpok

Egyenes kúp:

$$A = T + P,$$

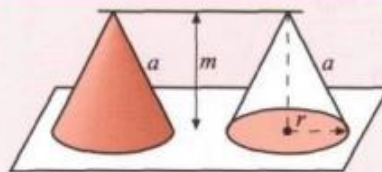
$$V = \frac{Tm}{3}.$$



Forgáskúp:

$$A = \pi r(r + a),$$

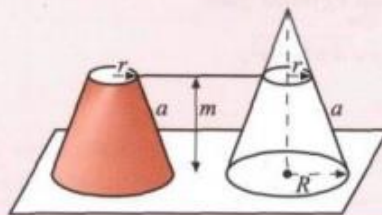
$$V = \frac{\pi r^2 m}{3}.$$



Csonkakúp:

$$A = \pi [R^2 + r^2 + a(R + r)],$$

$$V = \frac{\pi m}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$



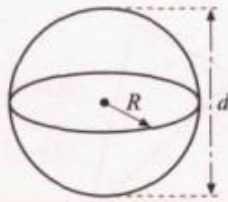
→ A következő oldalakon a térbeli alakzatok felszín- és térfogatképleteit találjuk.

## Gömb és részei

Gömb:

$$A = 4\pi R^2 = \pi d^2,$$

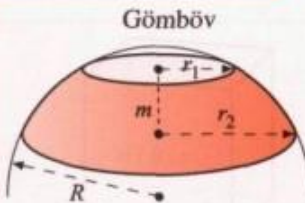
$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{\pi}{6} d^3.$$



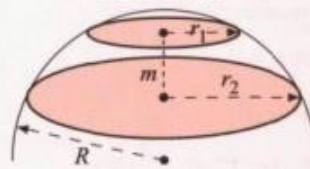
Gömbövel, -réteg:

$$A = 2\pi Rm,$$

$$V = \frac{\pi m}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + m^2).$$



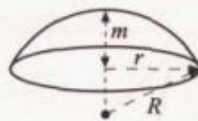
Gömbréteg



Gömbsüveg, -szelet:

$$A = 2\pi Rm + \pi r^2,$$

$$V = \frac{\pi}{3} m^2 (3R - m).$$



Gömbcikk:

$$A = \pi R(2m + r),$$

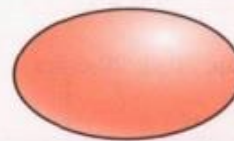
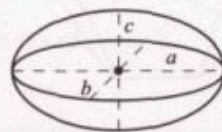
$$V = \frac{2\pi}{3} R^2 m.$$



## Ellipszoid

Ellipszoid:

$$V = \frac{4\pi}{3} abc, \text{ ahol } a, b, c \text{ a három féltengely hossza.}$$

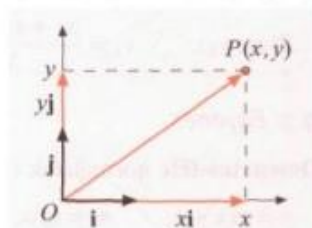


## 9. ANALITIKUS GEOMETRIA A SÍKBAN

### 9.1. Koordináta-rendszerek

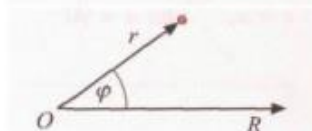
Descartes-féle derékszögű koordináták:

$$P = P(x, y); \quad \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$



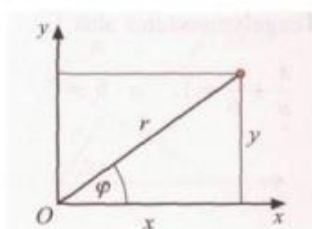
Polárkoordináták:

$$P = P(r, \varphi); \quad r = |\mathbf{r}| = |\overrightarrow{OP}|; \quad \varphi = (R, \mathbf{r}) \angle.$$



A két koordináta-rendszer kapcsolata:

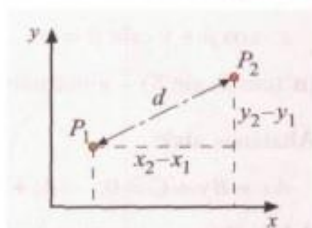
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



### 9.2. Pont

Két pont távolsága:

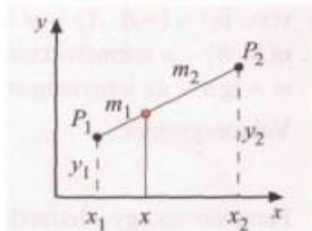
$$d = |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Az  $m_1 : m_2$  arányban osztó pont koordinátái:

$$P(x; y) = |\overrightarrow{P_1 P}| : |\overrightarrow{P P_2}| = m_1 : m_2,$$

$$x = \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_1 + m_2}.$$



A felezőpont koordinátái:

$$F(x_f; y_f): \quad x_f = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_f = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

→ A koordináta geometriával kapcsolatos feladatoknál lehet szükségünk ezekre vagy a következő oldalakon található képletekre.

Pontrendszer súlypontja (egyenlő súlyozás esetén):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

A háromszög súlypontjának koordinátái:

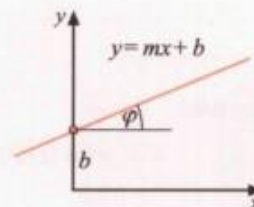
$$S(x_S; y_S): \quad x_S = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_S = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

### 9.3. Egyenes

**Descartes-féle** normálalak (iránytényezős egyenlet):

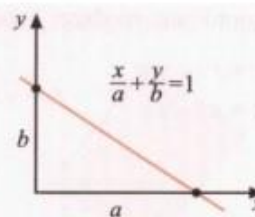
$$y = mx + b; \quad m = \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{ha } 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ,$$

$$x = a, \quad \text{ha } \alpha = 90^\circ.$$



Tengelymetszetes alak:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a \cdot b \neq 0.$$



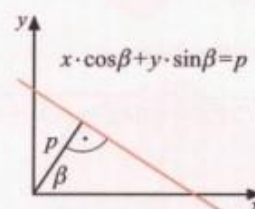
**Hesse-féle** normálalak:

$$x \cdot \cos \beta + y \cdot \sin \beta = p.$$

( $\mathbf{n}^\circ(\cos \beta, \sin \beta)$  – a normálvektor.)

Általános alak:

$$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0.$$



Adott  $P_0(x_0, y_0)$  ponton átmenő egyenes egyenletei:

$\mathbf{v}(v_1, v_2) = (-B, A)$  – az irányvektor;

$\mathbf{n}(A, B)$  – a normálvektor;

$m = \operatorname{tg} \alpha$  – az iránytangens.

Vektoregyenlet:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot t.$$

Paraméteres egyenletrendszer:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 \cdot t \\ y = y_0 + v_2 \cdot t \end{cases}$$

**Irányvektoros egyenlet:**

$$v_2(x - x_0) = v_1(y - y_0).$$

**Normálvektoros egyenlet:**

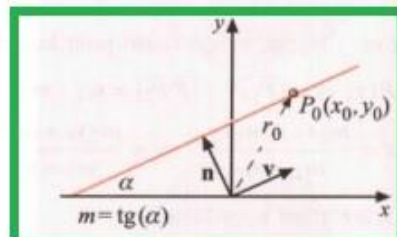
$$Ax + By = Ax_0 + By_0.$$

**Iránytényezős egyenlet:**

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

**Normálalak:**

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$



→ Szintén jellemző olyan feladat az érettségien, amelyben az egyenes egyenleteit kell felhasználnunk. Bár többfajtról tanulunk, de legtöbbször a normálvektoros egyenletre lesz majd szükségünk.

Két ponton  $(P_1(x_1; y_1), P_2(x_2; y_2))$  átmenő egyenes egyenlete:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

Két egyenes hajlásszöge:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|.$$

Két egyenes szögfelezőinek egyenlete:

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

$$x(\cos \beta_1 \pm \cos \beta_2) + y(\sin \beta_1 \pm \sin \beta_2) = \beta_1 \pm \beta_2.$$

Pont távolsága egyenestől:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{m^2 + 1}} = x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta - p.$$

Két egyenes párhuzamos, ha  $A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$ ;  $m_1 = m_2$ .

Két egyenes merőleges, ha  $A_1 \cdot A_2 = -B_1 \cdot B_2$ ;  $m_1 \cdot m_2 = -1$ .

#### 9.4. Kör

Kanonikus egyenlete,  $K(0, 0)$ :

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

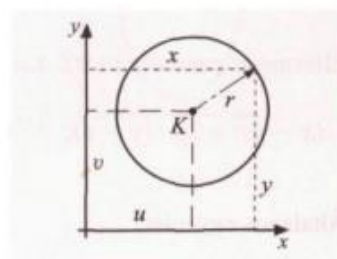
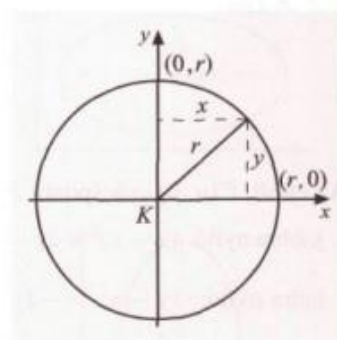
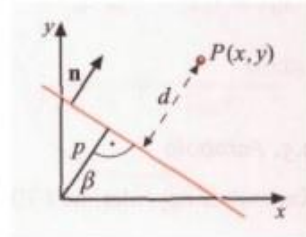
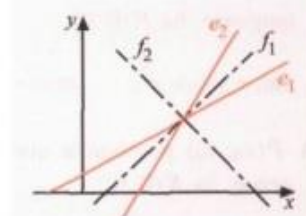
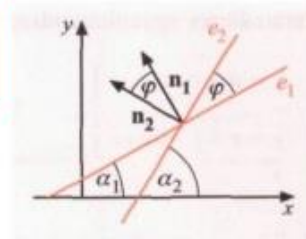
A  $K(u, v)$  középpontú egyenlet:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2.$$

Általános egyenlet ( $A > 0$ ):

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}}, \quad K\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right).$$



→ Attól függően, hogy mit ad meg a feladat, használhatjuk akár a két ponton áthaladó egyenes egyenletét is, de a leghasznosabb a kör egyenlete erről az oldalról.



*Ezzel pedig a végére is érkeztünk a fehér négyjegyűnk taglalásának. Bár nem mondom, hogy ne lenne még egy-két dolog, amelyre szükségünk lehetne az érettségi megírásakor, de ezek főként olyanok, amikre egy kis gondolkodással rá lehet jönni, vagy sokkal bonyolultabban vannak jelen.*

Matematikai, fizikai,  
kémiai összefüggések

Négyjegyű  
függvénytáblázatok



OKTATÁSI  
HIVATAL



# GONDOLKODÁSI MŰVELETEK

## HALMAZELMÉLET

### FOGALMAK, JELÖLÉSEK

A halmazok jelölésére általában az ábécé nagybetűit, a halmaz elemeinek a jelölésére pedig az ábécé kisbetűit használjuk.

$a \in H$  azt jelöli, hogy az  $a$  betűvel jelölt dolog eleme a  $H$  betűvel jelölt halmaznak.

$a \notin H$  azt jelöli, hogy az  $a$  betűvel jelölt dolog nem eleme a  $H$  betűvel jelölt halmaznak.

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  azt a véges halmazt jelöli, melynek elemei  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

$H := \{a \in A \mid t(a)\}$  ez a jelölés azt fejezi ki, hogy a  $t$  tulajdonsággal rendelkező  $a \in A$  dolgok halmazát  $H$ -val jelöljük.

$A = B$  az  $A$  és  $B$  halmazok egyenlőségét jelöli. Két halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha elemeik megegyeznek. Ha  $A \subset B$  és  $B \subset A$ , akkor  $A = B$ .

$|H|$  jelöli a  $H$  véges halmaz elemeinek a számát (számosságát).

$\{ \}$  vagy  $\emptyset$  az üres halmaz jelölése. Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, üres halmaznak nevezzük.  $|\emptyset| = 0$

### HALMAZ RÉSZHALMAZA

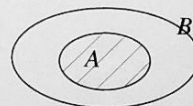
Akkor mondjuk, hogy egy  $A$  halmaz részhalmaza egy  $B$  halmaznak, ha  $A$  minden eleme  $B$ -nek is eleme.

Jelölés:

$$A \subset B \text{ vagy } B \supset A$$

$\emptyset \subset A$  Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

$A \subset A$  Minden halmaz részhalmaza önmagának.



### MŰVELETEK HALMAZOKKAL

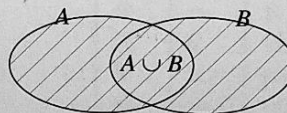
#### Halmazok uniója (egyesítése)

Az  $A$  és  $B$  halmazok uniója (egyesítése) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek  $A$  és  $B$  közül legalább az egyikhez hozzátartoznak.

Jelölés:

$$A \cup B$$

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$



→ Egy viszonylag gyakran előforduló, de könnyű feladattípus a halmazműveletekre építő. Két halmaz uniójának, metszetének és különbségének jelentését érdemes ismerni, valamint a hozzájuk tartozó kötőszavakat (ebben a sorrendben *vagy*, *és*, *csak*), hogy könnyebben megbirkózzunk a feladattal.

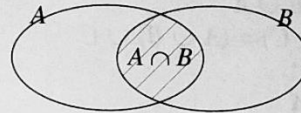
### Halmazok metszete (közös része)

Az  $A$  és a  $B$  halmazok metszete (közös része) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek  $A$ -hoz is és  $B$ -hez is hozzátartoznak.

Jelölés:

$$A \cap B$$

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$$



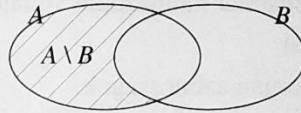
### Két halmaz különbsége

Az  $A$  és  $B$  halmazok különbség-halmazán azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek  $A$ -hoz hozzátartoznak, de  $B$ -hez nem.

Jelölés:

$$A \setminus B$$

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$$

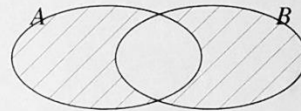


### Két halmaz szimmetrikus különbsége

Az  $A$  és  $B$  halmazok szimmetrikus különbségén az  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  halmazt értjük.

Jelölés:

$$A \Delta B$$



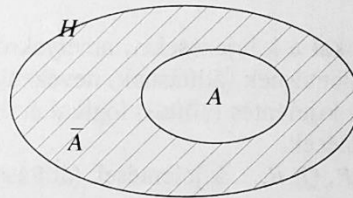
### Részhalmaz kiegészítő (komplementer) halmaza

Legyen adott a  $H$  halmaz (alaphalmaz) és ennek egy  $A$  részhalmaza.  $H$  azon elemeinek a halmazát, amelyek nem elemei  $A$ -nak, az  $A$  halmaz  $H$ -ra vonatkozó kiegészítő (komplementer) halmazának nevezzük.

Jelölés:

$$\bar{A}$$

$$\bar{A} := \{x \mid x \in H \text{ és } x \notin A\}$$



### Két halmaz Descartes-féle (direkt-) szorzata

Azoknak a rendezett pároknak a halmazát, amelyeknek az első komponense az  $A$ -nak, második komponense pedig a  $B$ -nek eleme, az  $A$  és  $B$  halmazok Descartes-féle (direkt-) szorzatának nevezzük.

Jelölés:

$$A \times B$$

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \text{ és } y \in B\}$$

$$\text{Ha } |A| = n \text{ és } |B| = m \text{ akkor } |A \times B| = nm$$

## LOGIKAI SZITA FORMULA KETTŐ, ILLETVE HÁROM HALMAZ ESETÉN

Ha  $A, B, C$  a  $H$  alaphalmaz részhalmazait jelöli, akkor

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|H \setminus (A \cup B)| = |H| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|H \setminus (A \cup B \cup C)| = |H| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

## GYAKRAN HASZNÁLT KÖVETKEZTETÉSI SÉMÁK

$$\frac{P \Rightarrow Q}{P} ; \frac{Q}{Q}$$

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\neg Q} ; \frac{\neg Q}{\neg P}$$

$$\frac{P \Rightarrow Q}{Q \Rightarrow R} ; \frac{Q \Rightarrow R}{P \Rightarrow R}$$

## KOMBINATORIKA

### PERMUTÁCIÓ

#### Ismétlés nélküli permutáció

$n$  különböző elemet kell az összes lehetséges módon sorba rendezni.

A különböző elrendezések száma:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Értelmezés szerint:  $P_0 = 0! = 1$

#### Ismétléses permutáció

$n$  olyan elemet kell az összes lehetséges módon sorba rendezni, amelyek között ismétlődő elemek is vannak. Ha az ismétlődések száma  $k_1, k_2, \dots, k_r$ ; ( $k_1 + k_2 + \dots + k_r \leq n$ ), akkor a különböző elrendezések száma:

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

#### Ciklikus permutáció

$n$  különböző elemet kell az összes lehetséges módon egy kör mentén sorba rendezni.

A különböző elrendezések száma:

$$P_n, \text{ ciklikus} = (n-1)!$$

### KOMBINÁCIÓ

#### Ismétlés nélküli kombináció

$n$  különböző elem közül  $k \leq n$  elemet kell kiválasztani. Egy elemet csak egyszer választhatunk ki, a sorrend nem számít, vagyis ha ugyanazokat az elemeket más sorrendben választjuk ki, az ugyanannak a kiválasztásnak számít. A különböző kiválasztások száma:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

#### Ismétléses kombináció

$n$  különböző elem közül  $k$  elemet kell kiválasztani. Egy elemet többször is kiválaszthatunk, a sorrend nem számít. A különböző kiválasztások száma:

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$$

- A kombinatorikus képleteket érdemes ismerni, viszont kiszámításuk szinte minden esetben számológéppel történik, így az  $n$  faktoriális és az  $n$  alatt a  $k$  billentyűk helyét célszerű észben tartani a gépünkön.
- Közép szintű érettségien az ismétléses kombinációra nem lesz szükségünk.

## VARIÁCIÓ

### Ismétlés nélküli variáció

$n$  különböző elem közül  $k \leq n$  elemet kell kiválasztani. Egy elemet csak egyszer választhatunk ki, a sorrend számít, vagyis ha ugyanazokat az elemeket más sorrendben választjuk ki, az más kiválasztásnak számít.

A különböző kiválasztások száma:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

### Ismétléses variáció

$n$  különböző elem közül  $k$  elemet kell kiválasztani. Egy elemet többször is kiválaszthatunk, a sorrend számít.

A különböző kiválasztások száma:

$$V_n^{k,i} = n^k$$

## FAKTORIÁLISOK ÉRTÉKEI

$n!$  értékei  $n = 0, 1, 2, \dots, 50$

$0! = 1$        $1! = 1$        $2! = 2$        $3! = 6$        $4! = 24$        $5! = 120$

4. táblázat

| $n$ | $n!$                      | $n$ | $n!$                    | $n$ | $n!$                    |
|-----|---------------------------|-----|-------------------------|-----|-------------------------|
| 6   | 720                       | 21  | $5,10909 \cdot 10^{19}$ | 36  | $3,71993 \cdot 10^{41}$ |
| 7   | 5 040                     | 22  | $1,12400 \cdot 10^{21}$ | 37  | $1,37638 \cdot 10^{43}$ |
| 8   | 40 320                    | 23  | $2,58520 \cdot 10^{22}$ | 38  | $5,23023 \cdot 10^{44}$ |
| 9   | 362 880                   | 24  | $6,20448 \cdot 10^{23}$ | 39  | $2,03979 \cdot 10^{46}$ |
| 10  | 3 628 800                 | 25  | $1,55112 \cdot 10^{25}$ | 40  | $8,15915 \cdot 10^{47}$ |
| 11  | 39 916 800                | 26  | $4,03291 \cdot 10^{26}$ | 41  | $3,34525 \cdot 10^{49}$ |
| 12  | 479 001 600               | 27  | $1,08889 \cdot 10^{28}$ | 42  | $1,40501 \cdot 10^{51}$ |
| 13  | 6 227 020 800             | 28  | $3,04888 \cdot 10^{29}$ | 43  | $6,04153 \cdot 10^{52}$ |
| 14  | 87 178 291 200            | 29  | $8,84176 \cdot 10^{30}$ | 44  | $2,65827 \cdot 10^{54}$ |
| 15  | 1 307 674 368 000         | 30  | $2,65253 \cdot 10^{32}$ | 45  | $1,19622 \cdot 10^{56}$ |
| 16  | 20 922 789 888 000        | 31  | $8,22284 \cdot 10^{33}$ | 46  | $5,50262 \cdot 10^{57}$ |
| 17  | 355 687 428 096 000       | 32  | $2,63131 \cdot 10^{35}$ | 47  | $2,58623 \cdot 10^{59}$ |
| 18  | 6 402 373 705 728 000     | 33  | $8,68332 \cdot 10^{36}$ | 48  | $1,24139 \cdot 10^{61}$ |
| 19  | 121 645 100 408 832 000   | 34  | $2,95233 \cdot 10^{38}$ | 49  | $6,08282 \cdot 10^{62}$ |
| 20  | 2 432 902 008 176 640 000 | 35  | $1,03331 \cdot 10^{40}$ | 50  | $3,04141 \cdot 10^{64}$ |

# SZÁMELMÉLET

## OSZTHATÓSÁG A TERMÉSZETES SZÁMOK KÖRÉBEN

Egy  $b$  természetes számot az  $a$  természetes szám osztójának nevezzük, ha létezik olyan  $c$  természetes szám, melyre teljesül, hogy  $a = bc$ .

Jelölés:

$b \mid a$   $b$  osztója  $a$ -nak

### Főbb oszthatósági szabályok ( $n \in \mathbb{N}$ )

$2 \mid n \Leftrightarrow$  ha  $n$  utolsó számjegye: 0, 2, 4, 6 vagy 8

$5 \mid n \Leftrightarrow$  ha  $n$  utolsó számjegye: 0 vagy 5

$4 \mid n \Leftrightarrow$  ha  $n$  utolsó két számjegyéből alkotott szám osztható 4-gyel

$8 \mid n \Leftrightarrow$  ha  $n$  utolsó három számjegyéből alkotott szám osztható 8-cal

$3 \mid n \Leftrightarrow$  ha  $n$  számjegyeinek összege osztható 3-mal

$9 \mid n \Leftrightarrow$  ha  $n$  számjegyeinek összege osztható 9-cel

$11 \mid n \Leftrightarrow$  ha  $n$  számjegyeit váltakozó előjellel összegezve 11-gyel osztható szám az eredmény

### Prímszámok

Azokat a természetes számokat, amelyeknek pontosan két osztójuk van, prímszámoknak nevezzük.

### A számelmélet alaptétele

Bármely  $n > 1$  összetett egész szám egyértelműen bontható fel prímszámok szorzatára (a tényezők sorrendjétől eltekintve).

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  az  $n > 1$  pozitív egész szám prímtényezői felbontása,  $p_1, p_2, \dots, p_k$  az  $n$  különböző prímosztóit jelöli.

### Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

Két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztójának a vizsgált számok közös osztói közül a legnagyobbat nevezzük.

Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszörösének a vizsgált számok közös többszörösei közül a legkisebbet nevezzük.

A  $k$  és az  $l$  pozitív egész szám legnagyobb közös osztójának a jele:  $(k; l)$ , a legkisebb közös többszörösüknek a jele:  $[k; l]$ .

Ha két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 1, akkor ezeket relatív prímszámoknak mondjuk.

- Itt találhatjuk a főbb oszthatósági szabályokat, melyekkel érdemes tisztában lennünk.
- Valamint a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös fogalma is itt van feltüntetve, bár ezek nevéből is következtethetünk a jelentésükre. Más kérdés a relatív prím fogalma, melyet szintén oszthatósági feladatoknál használhatunk fel.

### Osztók száma, osztók összege

Ha az  $n$  pozitív egész szám prímtényezős felbontása  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ , akkor  $n$  pozitív osztóinak a száma:

$$d(n) = (\alpha_1 + 1) (\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1),$$

$n$  pozitív osztóinak az összege:

$$s(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

### OSZTHATÓSÁG AZ EGÉSZ SZÁMOK KÖRÉBEN

Egy  $b$  egész számot az  $a$  egész szám osztójának nevezzük, ha létezik olyan  $c$  egész szám, melyre teljesül, hogy

$$a = bc$$

#### Oszthatósági szabályok

$$a \mid b \text{ és } b \mid c \Rightarrow a \mid c$$

$$a \mid b \text{ és } a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c), \quad a \mid (b - c)$$

$$\text{Ha } p \text{ prím és } p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ vagy } p \mid b.$$

$$\text{Ha } n \mid ab \text{ és } (n, a) = 1 \Rightarrow n \mid b.$$

$$\text{Ha } (a, b) = 1 \text{ és } a \mid c, b \mid c \Rightarrow ab \mid c.$$

### HATVÁNYOZÁS

#### Definíció

Az  $a$  valós szám  $n$ -edik ( $n \in \mathbf{N}^+$ ,  $n \geq 2$ ) hatványa olyan  $n$ -tényezős szorzat, melynek minden tényezője  $a$ ,  $a^1 = a$ .

#### A HATVÁNYFOGALOM KITERJESZTÉSE

$$a^0 = 1$$

$$a \in \mathbf{R}, a \neq 0$$

A  $0^0$  hatványt nem értelmezzük.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$n \in \mathbf{N}^+, a \in \mathbf{R}, a \neq 0$$

$$\frac{p}{a^q} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$p, q \in \mathbf{N}^+, q \neq 1, a > 0$$

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$$

$$p, q \in \mathbf{N}^+, q \neq 1, a > 0$$

→ Ha ismerjük, hogy hogyan kell egy gyökös vagy törtes formát hatványkitevős alakra hozni, úgy sok munkát megtakaríthatunk magunknak.

## A HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI TETSZŐLEGES R-BELI KITEVŐ ESETÉN

(Feltételezzük, hogy az összes szereplő kifejezés értelmezve van.)

### Azonos alapú hatványok

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

### A hatvány hatványozása

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

### Azonos kitevőjű hatványok

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

## GYÖKVONÁS

### NÉGYZETGYÖK

Az  $a \geq 0$  szám négyzetgyökének azt a nem negatív számot nevezzük, melynek négyzete  $a$ .

$\sqrt{a}$  az  $a \geq 0$  szám négyzetgyökét jelöli.

### AZONOSSÁGOK

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$a, b \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$a \geq 0, b > 0$$

$$(\sqrt{a})^k = \sqrt{a^k}$$

$$a \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

### AZ $n$ -EDIK GYÖK FOGALMA

$$n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$$

Ha  $a \geq 0$  és  $n$  páros szám, akkor  $n$ -edik gyök  $a$ -n értjük azt a nem negatív számot, amelynek  $n$ -edik hatványa  $a$ .

Ha  $a$  tetszőleges valós szám és  $n$  páratlan szám, akkor  $n$ -edik gyök  $a$ -n értjük azt a számot, amelynek  $n$ -edik hatványa  $a$ .

→ A hatványozás azonosságai szinte mindegyik érettségiben megjelennek, főként exponenciális egyenletek kapcsán. Viszont a gyökvonás azonosságait nem kell feltétlenül alkalmazni tudnunk, ha ismerjük a 21-ik oldalon jelölteket.

## A GYÖKVONÁS AZONOSSÁGAI

(Feltételezzük, hogy az összes szereplő kifejezés értelmezve van.)

### Azonos alapú gyökök

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$$

### Egyéb azonosságok

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

### Azonos kitevőjű gyökök

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

## LOGARITMUS

### Definíció

Egy pozitív  $x$  valós szám  $a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) alapú logaritmusának nevezzük azt a kitevőt, amelyre  $a$ -t emelve  $x$ -et kapunk. A kitevőt  $\log_a x$  jelöli.

$$a^{\log_a x} = x \quad x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$\lg x$  az  $x > 0$  szám tízes alapú logaritmusának a jelölése

$\ln x$  az  $x > 0$  szám természetes ( $e \approx 2,718$ ) alapú logaritmusának a jelölése

## AZONOSSÁGOK

(Feltételezzük, hogy az összes szereplő kifejezés értelmezve van.)

### Azonos alapú logaritmusok

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_a 1 = 0$$

### Kapcsolat különböző alapú logaritmusok között

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_a x = \log_{a^n} x^n$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

→ A logaritmus egy rémisztő fogalomnak tűnhet, de ha csak felületes is, de tisztában vagyunk a jelentésével, valamint ismerjük a fenti azonosságokat, úgy nem fognak nagy meglepetést okozni. Szintén fontos, hogy ne felejtünk el kikötést tenni.

## ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK, NEVEZETES AZONOSSÁGOK

### ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK

Számok, változók, a négy alpművelet és racionális kitevőjű hatványok szerepelhetnek bennük. Algebrai kifejezések pl.:

$$3a - 2b, \sqrt{a+b}, \frac{2a^2 - 5b^2}{a-b}.$$

Nem algebrai kifejezések pl.:

$$\log_3(x^2 - 4x), \sin x$$

### RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

Számok, változók és a négy alpművelet szerepelhetnek bennük. Ha az osztóban vagy a nevezőben nem szerepel változó, akkor racionális egész kifejezésről, egyébként racionális tört kifejezésről beszélünk.

### AZ $x$ VÁLTOZÓ $n$ -ED FOKÚ POLINOMJA

Az  $x$  változó  $n$ -ed fokú polinomjának nevezzük az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  alakú kifejezést, ahol  $a_i \in \mathbf{R}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ),  $a_n \neq 0$ . Két polinom hányadosát algebrai törtnek nevezzük.

### NEVEZETES AZONOSSÁGOK

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \dots - ab^{2k-1} + b^{2k})$$

$$a^{2k} - b^{2k} = (a-b)(a^{2k-1} + a^{2k-2}b + \dots + ab^{2k-2} + b^{2k-1})$$

$$a-b \mid a^n - b^n$$

$$a+b \mid a^n - b^n, \quad \text{ha } n = 2k$$

$$a+b \mid a^n + b^n, \quad \text{ha } n = 2k+1$$

→ A fenti három nevezetes azonosság ismerete elengedhetetlen, figyeljünk arra, hogy négyzetre emelésnél ne maradjon le a középső  $2ab$ -s rész.

# EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

## EGYENLETEK

### Egyismeretlenes egyenletek

Az  $f(x) = g(x)$  alakú egy ismeretlent tartalmazó egyenlőséget egyismeretlenes egyenletnek nevezzük. Az egyenlet gyökeinek nevezzük az egyenlet alaphalmazának azon elemeit, amelyek igaz-  
zá teszik az egyenlőséget. A gyökök összessége az egyenlet megoldáshalmaza.

Két egyenlet ekvivalens, ha az alaphalmazuk közös és megoldáshalmazuk egyenlő.

Az olyan átalakításokat, amelyek egy egyenletet vele ekvivalens egyenletbe visznek át, ekviva-  
lens átalakításoknak nevezzük.

### Ekvivalens átalakítások

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow f(x) + c = g(x) + c & c \in \mathbf{R} \\ f(x) = g(x) &\Leftrightarrow cf(x) = cg(x) & c \in \mathbf{R}, c \neq 0 \end{aligned}$$

### Néhány egyenlettípus

Elsőfokú egyismeretlenes egyenlet

$$ax + b = 0 \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0$$

$$\text{Megoldóképlete: } x = -\frac{b}{a}$$

Másodfokú egyenlet

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0 \quad \text{vagy} \quad x^2 + px + q = 0 \quad p, q \in \mathbf{R}$$

Megoldóképlete:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Gyöktényezős alak:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések (Viète-formulák):

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 x_2 = q$$

Diszkriminánsa:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Ha  $D > 0$ , az egyenletnek két különböző valós gyöke van.

Ha  $D = 0$ , az egyenletnek egy valós gyöke van.

Ha  $D < 0$ , az egyenletnek nincs valós gyöke.

→ A másodfokú egyenlet megoldóképletét régen álunkból keltve is illett tudnunk, viszont ha elég okos a számológépünk, akkor már az ezzel való bajlódást is elkerülhetjük, hiszen az érettségin elegendő csak a gyököket megadnunk a teljes pontszámért.

→ Néhány esetben viszont hasznosnak bizonyulhat a gyöktényezős alak ismerete is

## EGYENLŐTLENSÉGEK

Ha a változót is tartalmazó  $f(x)$  és  $g(x)$  kifejezéseket a  $>$ ,  $\geq$ ,  $<$ ,  $\leq$  jelek valamelyikével kapcsoljuk össze, egyismeretlenes egyenlőtlenséget kapunk.

### Az egyenlőtlenség megoldása

Az egyenlőtlenség megoldásának nevezzük az egyenlőtlenség alaphalmazának mindazon elemeit, amelyek igazsá teszik az egyenlőtlenséget. Egyenlőtlenséget megoldani annyit tesz, mint megadni az összes megoldását (vagy bebizonyítani, hogy nincs megoldása).

### Egyenlőtlenségek átalakítása

Ha  $f(x) < g(x)$ , akkor  $f(x) + c < g(x) + c$ .

Ha  $f(x) < g(x)$  és  $c > 0$ , akkor  $cf(x) < cg(x)$ .

Ha  $f(x) < g(x)$  és  $c < 0$ , akkor  $cf(x) > cg(x)$ .

## NEVEZETES KÖZEPEK

### Számtani közép

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$$

### Súlyozott számtani közép

$$A^* = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}, \quad p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbf{N}^+$$

### Mértani közép

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

### Négyzetes közép

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

### $k$ -adik hatványközep $k \in \mathbf{N}, k > 2$

$$Q_k = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}} \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

### Harmonikus közép

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad x_1, x_2, \dots, x_n > 0$$

→ Az aritmetikai és a geometria középről jó tudni, hogy a számtani közepet (hétköznapiabb nevén átlagot) és mértani közepet jelentik.

## A KÖZEPEK KÖZÖTT FENNÁLLÓ NEVEZETES EGYENLŐTLENSÉGEK

Ha  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  és  $k > 2$ , akkor

$$\min \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq Q_k \leq \max \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Bármely kettő között az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

## SOROZATOK

### Definíciók, jelölések

A pozitív egész számok halmazán értelmezett olyan függvényeket, amelyeknek értékkészlete valós számokból áll, számsorozatoknak nevezzük.

Általában a sorozat első tagját  $a_1$ -gyel,  $n$ -edik tagját  $a_n$ -nel, a sorozat első  $n$  tagjának az összegét  $S_n$ -nel jelöljük.

## SPECIÁLIS SOROZATOK ÉS SOROK

### Számtani sorozat

Első tagja  $a_1$ , továbbá  $n > 1$  esetén  $a_n = a_{n-1} + d$ , ahol  $d$  a sorozatra jellemző állandó, a sorozat különbsége, differenciája.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad n > 1$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$$

### Mértani sorozat

Első tagja  $a_1$ , továbbá  $n > 1$  esetén  $a_n = a_{n-1}q$ , ahol  $q \neq 0$  a sorozatra jellemző állandó, a sorozat hányadosa (kvóciense).

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} \quad n > 1$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{ha } q \neq 1$$

$$S_n = na_1 \quad \text{ha } q = 1$$

### Mértani sor

Az olyan sorozatot, amelynek  $n$ -edik tagja egy adott mértani sorozat első  $n$  tagjának összegével egyenlő, mértani sornak nevezzük.

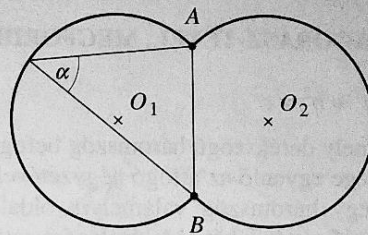
A mértani sor konvergens, ha  $|q| < 1$ .

Ha a mértani sor konvergens, akkor a határértékét a sor összegének nevezzük:  $S = \frac{a_1}{1-q}$ .

→ A számtani és a mértani sorozatokra vonatkozó fontosabb szabályok.

### Látókörv

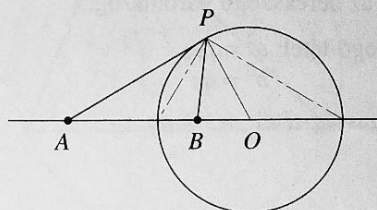
Ha  $\alpha$  konvex szög, akkor azoknak a pontoknak a halmaza egy síkban, amelyekből egy, a síkra illeszkedő  $\overline{AB}$  szakasz  $\alpha$  szögben látszik; két, az  $AB$  egyenesre tengelyesen szimmetrikus körívből álló pontthalmaz, amelynek  $A$  és  $B$  nem eleme.



### Apolloniosz tétele

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \lambda \neq 1$$

A sík azon pontjainak a halmaza, amelyeknek egy a síkban fekvő szakasz két végpontjától mért távolságának aránya 1-től különböző állandó, egy kör.



### SOKSZÖGEK

Az  $n$  oldalú konvex sokszög átlóinak száma:  $\frac{n(n-3)}{2}$ .

Az  $n$  oldalú sokszög belső szögeinek az összege:  $(n-2)180^\circ$ .

Az  $n$  oldalú konvex sokszög külső szögeinek az összege:  $360^\circ$ .

Az  $n$  oldalú szabályos  $n$ -szög szögének nagysága:  $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$ .

### FONTOSABB ELEMI GEOMETRIAI ÖSSZEFÜGGÉSEK

#### PÁRHUZAMOS SZELŐK TÉTELE

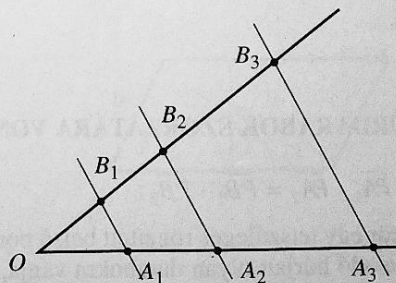
$$\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_2B_3}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2A_3}}$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB_2}}$$

Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával.

A tétel megfordítása:

Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyeknek az aránya mind a két száron ugyanaz, akkor a két egyenes párhuzamos.



→ Találhatunk itt néhány sokszögre vonatkozó összefüggést is, melyek az oldalak számából következtetnek az egyes adatokra.

## PITAGORASZ-TÉTEL, MEGFORDÍTÁSA, BEFOGÓ-TÉTEL, MAGASSÁG-TÉTEL

$$a^2 + b^2 = c^2$$

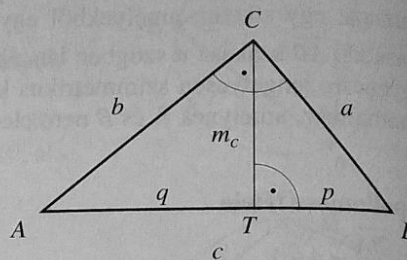
Bármely derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.

Ha egy háromszög valamelyik oldalának négyzete egyenlő a másik két oldalának négyzetösszegével, akkor az derékszögű háromszög.

Befogó-tétel:  $a^2 = pc$ ;

$$b^2 = qc$$

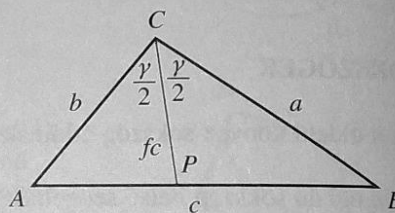
Magasság-tétel:  $m_c^2 = pq$



## SZÖGFELEZŐ TÉTELE

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{b}{a}$$

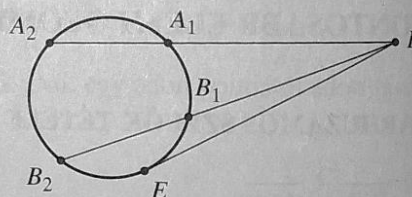
A háromszög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja ketté.



## KÖRÉRINTŐ ÉS SZELŐ KÖZÖTTI ÖSSZEFÜGGÉS

$$\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} = \overline{PB_1} \cdot \overline{PB_2} = \overline{PE}^2$$

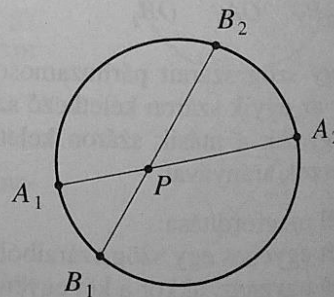
Egy körhöz egy külső pontból húzott tetszőleges szelő körig terjedő szakaszai hosszának a szorzata egyenlő a pontból a körhöz húzott érintőszakasz négyzetével.



## HÚRDARABOK SZORZATÁRA VONATKOZÓ ÖSSZEFÜGGÉS

$$\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} = \overline{PB_1} \cdot \overline{PB_2}$$

A kör egy tetszőleges rögzített belső pontja a kör rajta áthaladó húrjait olyan darabokra vágja, melyek szorzata állandó.



→ A Pitagorasz tétel már 8. osztály óta kísért minket, viszont akár a sík-, akár a térgeometria feladatoknál nagy hasznát vehetjük.

## SÍKIDOMOK KERÜLETE, TERÜLETE

### HÁROMSZÖG

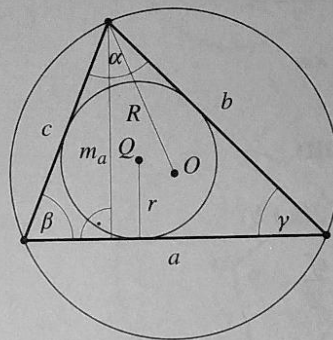
$$K = a + b + c = 2s$$

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

$$T = \frac{abc}{4R}$$

$$T = sr \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

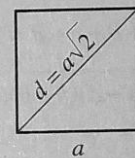
$$\text{Héron-képlet: } T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



### NÉGYZET

$$K = 4a^2$$

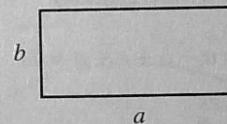
$$T = a^2 = \frac{d^2}{2}$$



### TÉGLALAP

$$K = 2(a + b)$$

$$T = ab$$

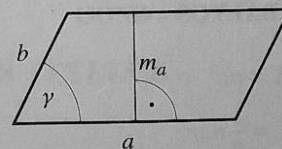


### PARALELOGRAMMA

$$K = 2(a + b)$$

$$T = am_a$$

$$T = ab \sin \gamma$$



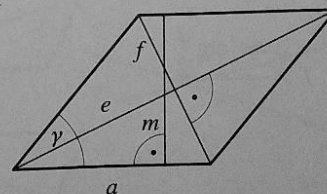
### ROMBUSZ

$$K = 4a$$

$$T = am$$

$$T = \frac{ef}{2}$$

$$T = a^2 \sin \gamma$$



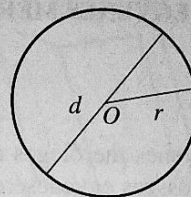
- A háromszög fent jelölt képletei közül is inkább a trigonometrikus az, amelyet minden feladatnál fel tudunk használni. A többi akkor érdemes használni, ha a feladat a köré- vagy belé írható körök sugarait is számonkéri.
- A speciális négyszögek területképleteit jó ismernünk, de sok esetben elegendő, ha két háromszögre osztjuk fel, és külön-külön határozzuk meg.

## KÖR

$$K = 2r\pi$$

$$T = r^2\pi$$

$$T = \frac{d^2\pi}{4}$$



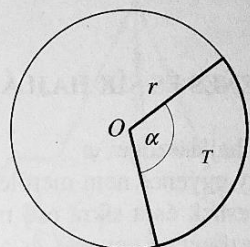
## KÖRCEKK

$$i = r\hat{\alpha},$$

$$T = \frac{ri}{2} = \frac{r^2\hat{\alpha}}{2} \quad \hat{\alpha}: \text{a szög radiánban mért mértéke}$$

$$i = \frac{r\alpha\pi}{180}$$

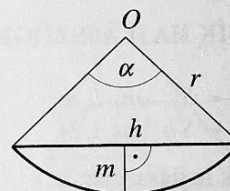
$$T = \frac{r^2\alpha\pi}{360} \quad \alpha: \text{a szög fokban mért mértéke}$$



## KÖRSZELET

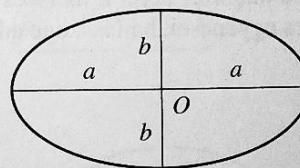
$$T = \frac{1}{2}[ri - h(r - m)] = \frac{1}{2}r^2(\hat{\alpha} - \sin\alpha)$$

$\hat{\alpha}$ : a szög radiánban mért mértéke



## ELLIPSZIS

$$T = ab\pi$$

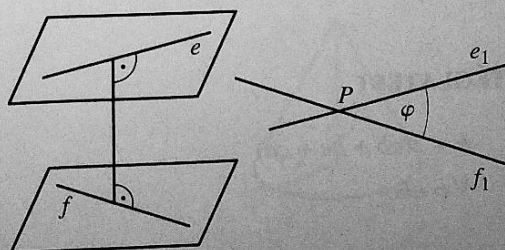


## FONTOSABB TÉRGEOMETRIAI FOGALMAK ÉS TÉTELEK

### KITÉRŐ EGYENESEK TÁVOLSÁGA ÉS SZÖGE

Az  $e$  és  $f$  kitérő egyenesek távolsága a rájuk illeszkedő egymással párhuzamos síkok távolsága.

Az  $e$  és  $f$  kitérő egyenesek szögén a tér egy tetszőleges  $P$  pontján átmenő  $e$ -vel és  $f$ -fel párhuzamos,  $e_1$  és  $f_1$  egyenesek hajlásszögét értjük.



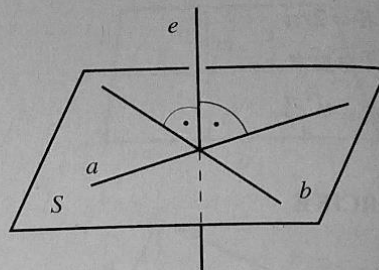
- A kör kerület- és területképlete megkerülhetetlen, egyszerű, de minden érettségien előforduló dolog.
- A körcekk területét általában a kúp kiterített palástjának meghatározásához szoktuk használni, de a középponti szöget is így tudjuk meghatározni.

## SÍK ÉS EGYENES MERŐLEGESSÉGE, SÍKRA MERŐLEGES EGYENES TÉTELE

$$\begin{aligned} a &\perp e \\ b &\perp e \end{aligned}$$

Az  $e$  egyenes merőleges az  $S$  síkra, ha  $e$  merőleges az  $S$  sík összes egyenesére.

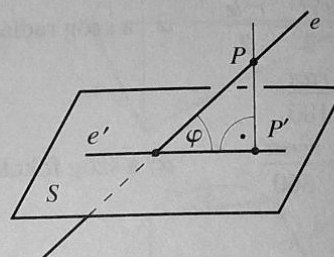
Ha az  $e$  egyenes merőleges egy  $S$  sík két nem párhuzamos egyenesére, akkor  $e$  merőleges  $S$  bármely egyenesére is.



## EGYENES ÉS SÍK HAJLÁSSZÖGE

$e$  és  $S$  hajlásszöge:  $\varphi$

Ha egy egyenes nem merőleges egy síkra, akkor az egyenesnek és a síkra eső merőleges vetületének a hajlásszögét az egyenes és a sík hajlásszögének nevezzük.

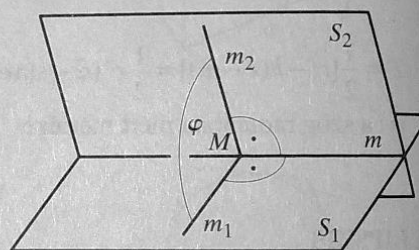


## KÉT SÍK HAJLÁSSZÖGE

$$\begin{aligned} m_1 &\perp S_1, & m_1 &\perp m \\ m_2 &\perp S_2, & m_2 &\perp m \end{aligned}$$

A síkok hajlásszöge:  $\varphi$ .

A két sík metszévonalának egy tetszőleges pontjában a síkokon belül a metszévonalra állított merőleges egyenesek hajlásszöge adja a két sík hajlásszögét.

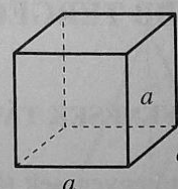


## TESTEK FELSZÍNE, TÉRFOGATA

### KOCKA

$$A = 6a^2$$

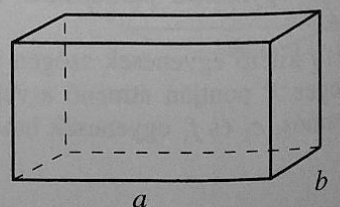
$$V = a^3$$



### TÉGLATEST

$$A = 2(ab + bc + ca)$$

$$V = abc$$



→ Térgometria feladatok megoldása során szinte biztosan meg kell határoznunk az adott test felszínét vagy térfogatát. Ezekhez találunk hasznos képleteket a következő oldalakon.

## HASÁB

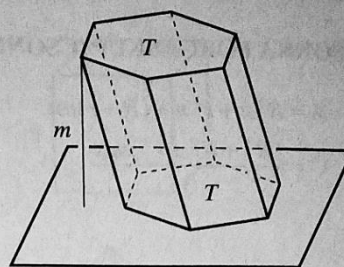
$$A = 2T + P$$

$$V = Tm$$

$T$ : alapterület

$P$ : palástterület (az oldallapok területösszege)

$m$ : magasság



## GÚLA

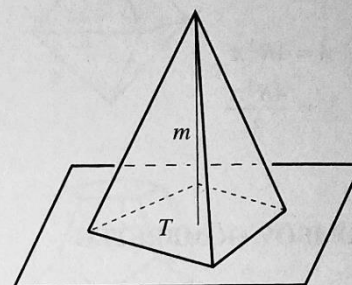
$$A = T + P$$

$$V = \frac{Tm}{3}$$

$T$ : alapterület

$P$ : palástterület (az oldallapok területösszege)

$m$ : magasság



## CSONKAGÚLA

$$A = T + t + P$$

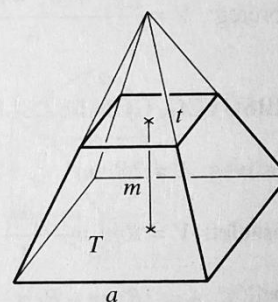
$$V = \frac{(T + \sqrt{Tt} + t)m}{3}$$

$T$ : az alaplappal területe

$t$ : a fedőlap területe

$P$ : palástterület (az oldallapok területösszege)

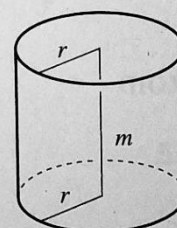
$m$ : magasság



## FORGÁSHENGER (KÖRHENGER)

$$A = 2r^2\pi + 2r\pi m$$

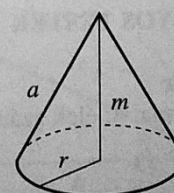
$$V = r^2\pi m$$



## FORGÁSKÚP (KÖRKÚP)

$$A = r^2\pi + r\pi a$$

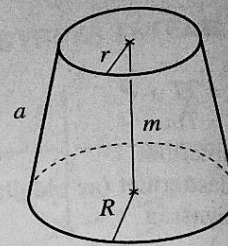
$$V = \frac{r^2\pi m}{3}$$



### CSONKA FORGÁSKÚP (CSONKA KÖRKÚP)

$$A = R^2 \pi + r^2 \pi + (R + r)a\pi$$

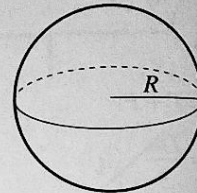
$$V = \frac{(R^2 + Rr + r^2)m\pi}{3}$$



### GÖMB

$$A = 4R^2 \pi$$

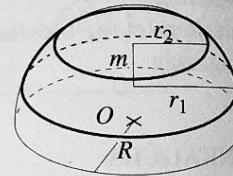
$$V = \frac{4R^3 \pi}{3}$$



### GÖMBÖV, GÖMBRÉTEG

Gömböv:  $A = 2R\pi m$

Gömbréteg:  $V = \frac{(3r_1^2 + 3r_2^2 + m^2)m\pi}{6}$



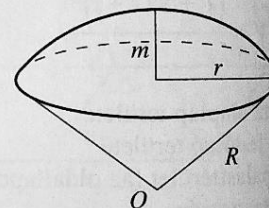
### GÖMBSÜVEG, GÖMBSZELET, GÖMBCIKK

Gömbösüveg:  $A = 2R\pi m$

Gömb szelet:  $V = Rm^2 \pi - \frac{m^3 \pi}{3}$

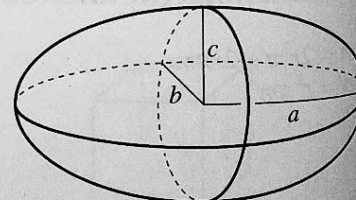
Gömbcikk:  $A = 2R\pi m + Rr\pi$

$$V = \frac{2R^2 m \pi}{3}$$



### ELLIPSZOID

$$V = \frac{4abc\pi}{3}$$



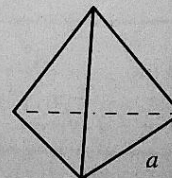
### SZABÁLYOS TESTEK

#### Tetraéder

lapok száma: 4; élek száma: 6; csúcsok száma: 4

$$A = a^2 \sqrt{3}$$

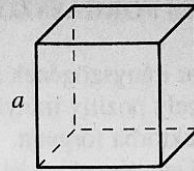
$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$



### Hexaéder (kocka)

lapok száma: 6; élek száma: 12; csúcsok száma: 8

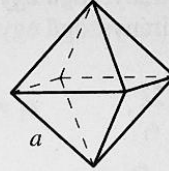
$$A = 6a^2$$
$$V = a^3$$



### Oktaéder

lapok száma: 8; élek száma: 12; csúcsok száma: 6

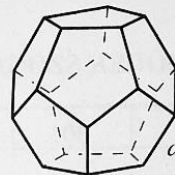
$$A = 2a^2\sqrt{3}$$
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$



### Dodekaéder

lapok száma: 12; élek száma: 30; csúcsok száma: 20

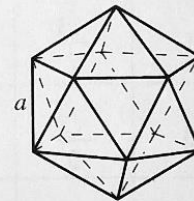
$$A = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$
$$V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$$



### Ikozaéder

lapok száma: 20; élek száma: 30; csúcsok száma: 12

$$A = 5a^2\sqrt{3}$$
$$V = \frac{a^3(15+5\sqrt{5})}{12}$$



## TRIGONOMETRIA

### SZÖGFÜGGVÉNYEK DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGBEN

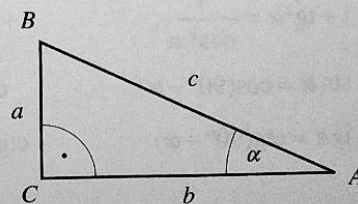
$ABC\Delta$   $\alpha$  hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszög.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}}$$



→ A Pitagorasz tétel mellett érdemes tudnunk még a fenti trigonometrikus definíciókról is, ha a szög meghatározása lenne a feladat.

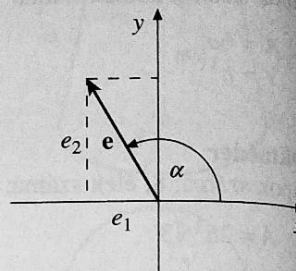
## TETSZŐLEGES FORGÁSSZÖG SZÖGFÜGGVÉNYEI

Egy  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  vektor irányszögének azt a forgásszöget nevezzük, amely az  $x$  tengely pozitív irányába mutató egységvektort  $\mathbf{v}$ -vel egyállású vektorba forgatja.

$\mathbf{e}$ :  $\alpha$  irányszögű egységvektor  $|\mathbf{e}| = 1$

$\sin \alpha = e_2$  az  $\alpha$  irányszögű egységvektor második koordinátája

$\cos \alpha = e_1$  az  $\alpha$  irányszögű egységvektor első koordinátája



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{e_2}{e_1}, \quad e_1 \neq 0, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{e_1}{e_2}, \quad e_2 \neq 0, \alpha \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

## NEVEZETES SZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

9. táblázat

|     | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $360^\circ$ |
|-----|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| sin | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1          | 0           | -1          | 0           |
| cos | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0          | -1          | 0           | 1           |
| tg  | 0         | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | -          | 0           | -           | 0           |
| ctg | -         | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0          | -           | 0           | -           |

## ÖSSZEFÜGGÉSEK EGY SZÖG KÜLÖNBÖZŐ SZÖGFÜGGVÉNYEI KÖZÖTT

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha),$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$$

→ Ritkán, és főként a trigonometrikus egyenletekben, de előfordulhat, hogy szükségünk lesz a fenti két összefüggésre, ha helyettesítésre kerülne sor.

### Többszörös és félszögek szögfüggvénye

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\left| \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

### HÁROMSZÖGEKRE VONATKOZÓ TRIGONOMETRIKUS TÉTELEK

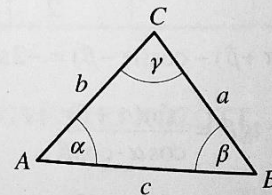
#### Színusztétel

A háromszög oldalainak aránya megegyezik az oldalakkal szemkötti szögek szinuszaik arányával.

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

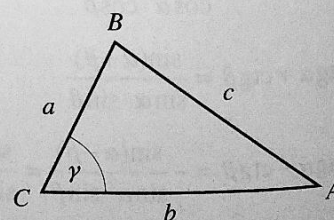
( $R$  a háromszög köré írt kör sugara)



#### Koszinusztétel

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

A háromszög egyik oldalának négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegéből levonva ezeknek az oldalaknak és a közbezárt szög koszinuszának a kétszeres szorzatát.



→ A síkgeometria feladatok megoldásához többnyire elengedhetetlen a fenti szinusz- és koszinusztételek alkalmazásának elsajátítása.

### Tangenstétel

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

### TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK MEGOLDÁSÁNÁL HASZNÁLT ÖSSZEFÜG-GÉSEK

$$\sin \alpha = \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad \alpha = -\beta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

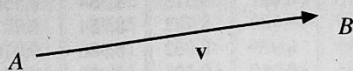
$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = A \sin (\alpha + \varphi), \quad \text{ahol } A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad a \neq 0$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = A \cos (\alpha - \varphi), \quad \text{ahol } A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \quad b \neq 0$$

→ Sajnos a számológépünk gyorsan számol ugyan, de ne hagyatkozzunk mindenben rá. Ha trigonometrikus egyenletet oldunk meg, tartsuk észben, hogy sokszor két megoldása van a feladatnak. Szinusznál  $\alpha$  és  $180^\circ - \alpha$ , koszinusznál pedig  $\alpha$  és  $-\alpha$ .

# VEKTOROK

## JELÖLÉSEK



$\vec{AB}$

$\mathbf{v}$

A vektor hosszát a vektor abszolút értékének nevezzük.  
A  $\mathbf{v}$  vektor abszolút értékének jelölése  $|\mathbf{v}|$ .

Egyenlő vektorok



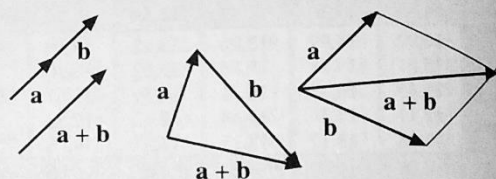
Ellentett vektorok



## VEKTORMŰVELETEK

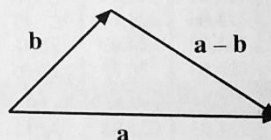
Vektorok összeadása

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a} \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ |\mathbf{a} + \mathbf{b}| &\leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \end{aligned}$$



Két vektor különbsége

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \\ ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| &\leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \end{aligned}$$



Vektor szorzása skalárral

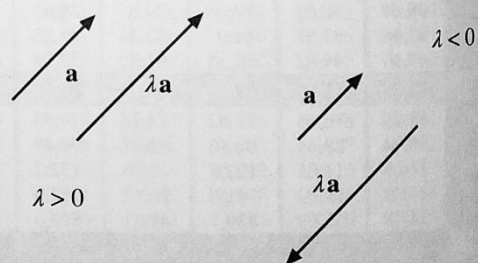
$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \lambda \mathbf{a} \\ |\mathbf{b}| &= |\lambda| |\mathbf{a}| \\ \mathbf{a} \text{ és } \lambda \mathbf{a} &\text{ egyirányú, ha } \lambda > 0 \\ &\text{különböző irányú, ha } \lambda < 0 \end{aligned}$$

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}, \text{ ha } \lambda = 0$$

$$\lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a} = (\lambda + \mu)\mathbf{a}$$

$$(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$$

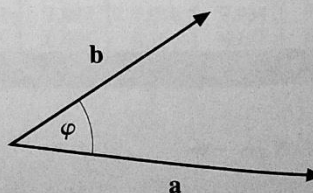


Két vektor skaláris szorzata

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$



→ Amennyiben egy koordináta geometriai feladat vektorok által bezárt szöget kér számon, úgy biztosan a skaláris szorzat képletét kell felhasználnunk. Ezen és a következő oldalon találjuk a két típust, sok esetben ezeket kell egyenlővé tennünk egymással.

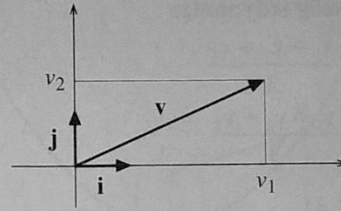
## VEKTOR KOORDINÁTÁK

**i, j** egységvektorok

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}(v_1; v_2)$$

A **v** vektor koordinátái  $v_1, v_2$ .



Műveletek:

$$\mathbf{a}(a_1; a_2), \quad \mathbf{b}(b_1; b_2) \quad \lambda \in \mathbf{R} \text{ esetén}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda a_1 \mathbf{i} + \lambda a_2 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

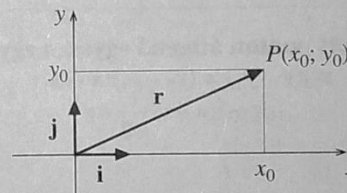
← Így számoljuk ki egy vektor hosszát

## KOORDINÁTA-GEOMETRIA

### DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTÁK

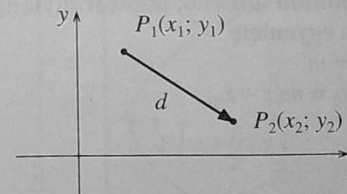
$$\mathbf{r} = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}(x_0; y_0)$$



Két pont távolsága

$$d = |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

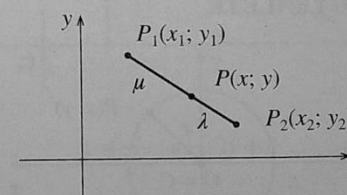


Osztópont koordinátái

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = \frac{\mu}{\lambda}$$

$$x = \frac{\lambda x_1 + \mu x_2}{\lambda + \mu}$$

$$y = \frac{\lambda y_1 + \mu y_2}{\lambda + \mu}$$



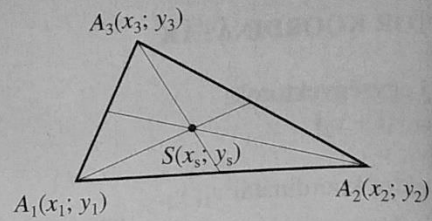
$$\text{Felezőpont koordinátái} \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- A két pont távolságára vonatkozó összefüggés hasznos ugyan, de úgy tapasztaltam, hogy sokkal kisebb az esély a hibára, ha előbb a  $P_1$ -ből a  $P_2$  pontba mutató vektor koordinátáit számoljuk ki, majd ennek a vektornak a hosszát.
- A felezőpont képletét, ahogyan a következő oldalon található súlypontét is sokkal egyszerűbb úgy megjegyezni, hogy a megfelelő koordinátákat átlagolnunk kell.

### Háromszög súlypontja

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$



### EGYENES EGYENLETEI

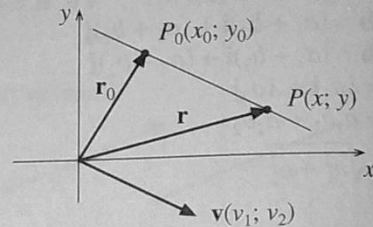
#### Adott ponton átmenő adott irányvektorú egyenes egyenlete

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

$$x = x_0 + tv_1$$

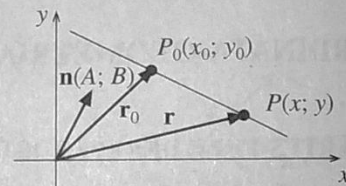
$$y = y_0 + tv_2$$

$$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$$



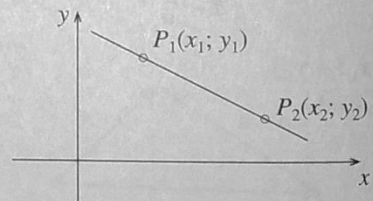
#### Adott ponton átmenő adott normálvektorú egyenes egyenlete

$$Ax + By = Ax_0 + By_0$$



#### Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete

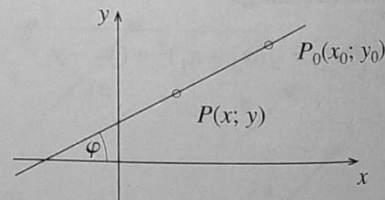
$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$



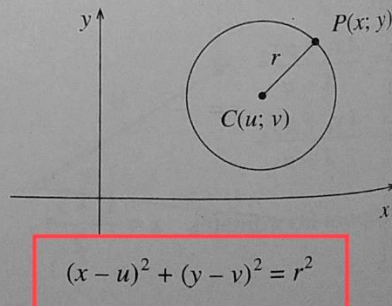
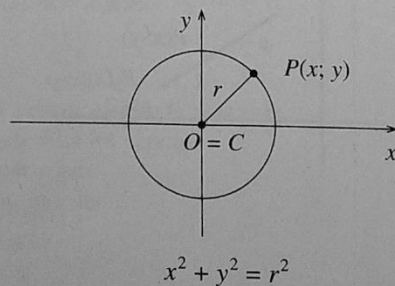
#### Adott ponton átmenő, adott iránytangensű egyenes egyenlete

$$\tan \varphi = m$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



### KÖR EGYENLETE



- Több módszerünk van egy egyenes egyenletének meghatározására, de ezek közül a legegyszerűbben talán a normálvektoros használható. Érdekes ismernünk még az irányvektoros és a két ponton áthaladó képletét is, de ahol lehet, próbáljuk meg elkerülni a használatukat.
- A kör egyenletét pedig az oldal alján találhatjuk.

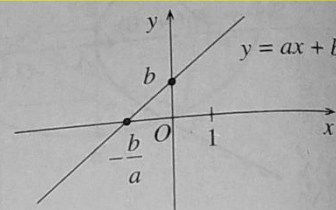
## NEVEZETES FÜGGVÉNYEK

### ELSŐFOKÚ FÜGGVÉNY

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto ax + b; \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0$$

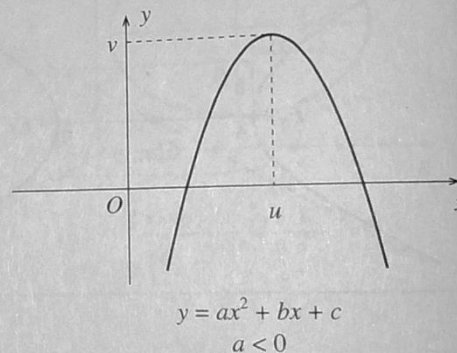
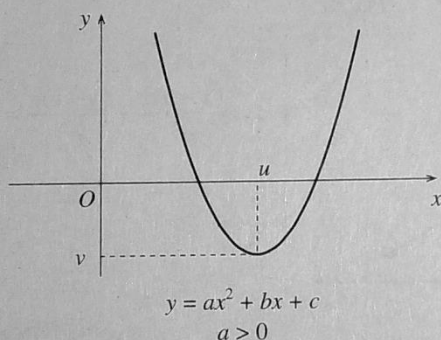
$$y = ax + b$$

Az elsőfokú függvény grafikonja egyenes.



### MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0$$

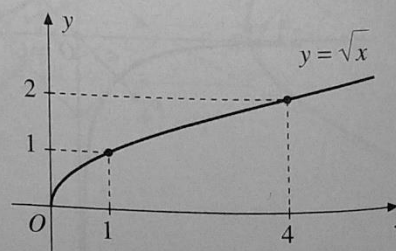


A másodfokú függvény grafikonja parabola.

A parabola tengelypontjának  $u$  és  $v$  koordinátáit megkapjuk, ha elvégezzük az  $ax^2 + bx + c = a(x - u)^2 + v$  átalakítást.

### NÉGYZETGYÖKFÜGGVÉNY

$$\mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

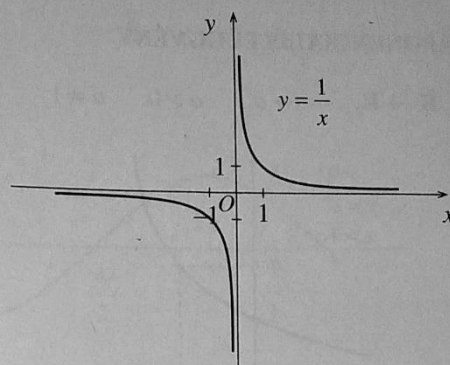


- A függvények közül az elsőfokú- vagyis a lineáris, valamint az abszolútérték függvény grafikonját érdemes ismernünk. Az ezekre építő feladatokat nagy valószínűséggel algebrai, azaz sima számolós úton is meg tudjuk majd oldani, de olykor megkönnyítheti a megoldást.
- A másodfokú függvény képe viszont szinte biztosan szerepel majd valamilyen formában az érettségin, így az alakjáról és a mozgásáról mindenképpen tudnunk érdemes.

### AZ $\frac{1}{x}$ FÜGGVÉNY

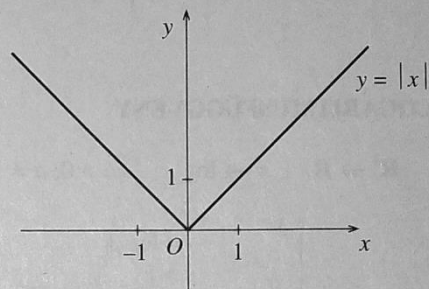
$$(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

Az  $\frac{1}{x}$  függvény grafikonja hiperbola.



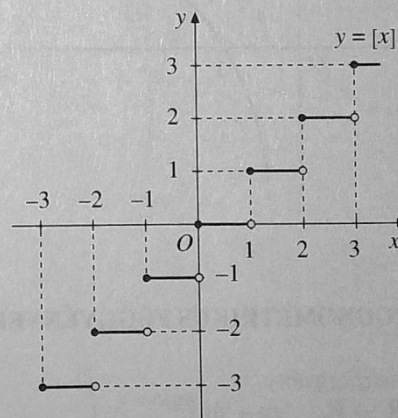
### ABSZOLÚTÉRTÉK-FÜGGVÉNY

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto |x|$$



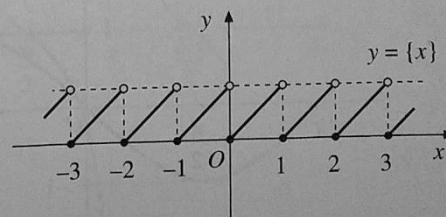
### EGÉSZRÉSZFÜGGVÉNY

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}, \quad x \mapsto [x]$$

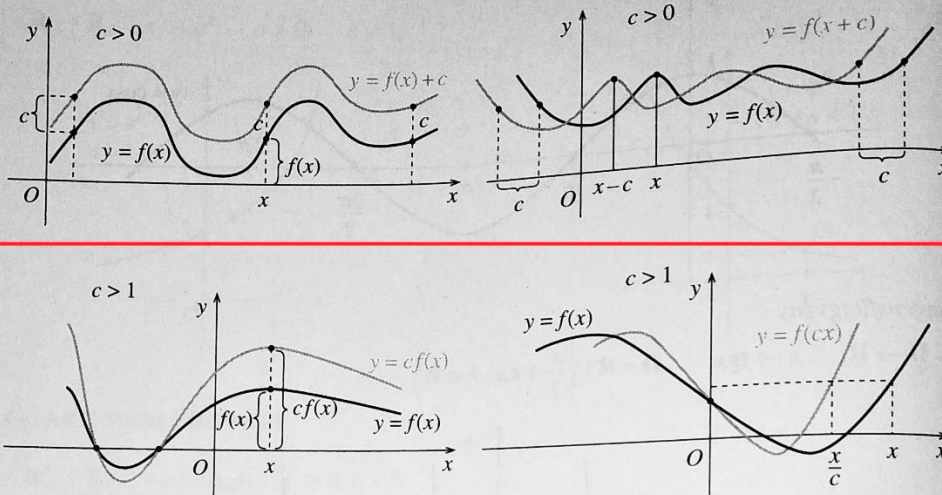


### TÖRTRÉSZFÜGGVÉNY

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \{x\}$$



## FÜGGVÉNYTRANSZFORMÁCIÓ



## FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

Határérték számítási szabályok

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot f(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  és  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  létezik és véges, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ ha } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

## DERIVÁLT (DIFFERENCIÁLHÁNYADOS), DERIVÁLTFÜGGVÉNY

AZ  $x \mapsto f(x)$  FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA AZ  $x_0$  PONTBAN

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Bár négy féle függvénytranszformációt különböztetünk meg, de a leggyakrabban az első kettő fog majd megjelenni.
- Két dolgot jegyezzünk meg velük kapcsolatban: a lineáris függvényeket leszámítva, bármilyen függvény esetén ugyanúgy viselkednek. Vagyis ha a műveleten belül van a számom, akkor az ellentettjével vízszintes irányban, ha pedig a műveleten kívül, akkor függőleges irányban mozdul el a függvényem összes pontja
- $(x + a)^2$  esetén  $-a$ -val tolódik vízszintesen
- $x^2 + b$  esetén pedig  $+b$ -vel függőlegesen

## NEVEZETES VALÓSZÍNŰSÉG-ELOSZLÁSOK

### Diszkrét valószínűség-eloszlások

Egyenletes eloszlás

$\xi$  értékei:  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$P(\xi = x_i) = \frac{1}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$M(\xi) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$D(\xi) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n^2}}$$

Hipergeometrikus eloszlás

$\xi$  értékei:  $0, 1, 2, \dots, n$

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

ahol  $K < N$  adott természetes számok

$$M(\xi) = n \cdot \frac{K}{N}$$

$$D(\xi) = \sqrt{n \cdot \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}}$$

Poisson-eloszlás

$\xi$  értékei:  $0, 1, 2, \dots, n, \dots$

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ahol  $\lambda$  egy adott pozitív szám, az eloszlás paramétere

$$M(\xi) = \lambda$$

$$D(\xi) = \sqrt{\lambda}$$

Binomiális eloszlás

$\xi$  értékei:  $0, 1, 2, \dots, n$

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

ahol  $p$  tetszőleges  $0$  és  $1$  közötti szám.

$$M(\xi) = np$$

$$D(\xi) = \sqrt{np(1-p)}$$

Geometriai eloszlás

$\xi$  értékei:  $1, 2, \dots, n, \dots$

$$P(\xi = k) = p \cdot q^{k-1},$$

ahol  $p = 1 - q$  és  $0 < p < 1$

$$M(\xi) = \frac{1}{p}$$

$$D(\xi) = \sqrt{\frac{q}{p^2}} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$$

→ Ezt a két képletet valószínűségi számítás feladatoknál használhatjuk fel, de a legtöbb esetben a kedvező/összes összefüggésből, vagy egyéb logikus következtetésből is adódni szokott ugyanaz a megoldás, így nem kiküszöbölhető az alkalmazása.

# STATISZTIKAI JELLEMZŐK

## HELYZETMÉRTÉKEK

Módusz vagy leggyakoribb mérték. Minden adatfajtánál értelmezhető. Ha több egyenlő gyakoriságú van, akkor a leggyakoribb adatok halmazát lehet megadni.

Medián vagy középső adat, csak rendezhető adatoknál értelmezhető. Páratlan számú adat esetén a sorba rendezett adatok között az, amelyik előtt és után ugyanannyi adat áll. Páros számú adat esetén pedig a két középső elem számtani közepe.

Átlag vagy számtani közép, csak számszerű adatoknál értelmes, definíciója

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

## SZÓRÓDÁSI MÉRTÉKEK

Terjedelem: a legnagyobb és a legkisebb adat különbsége.

Átlagos abszolút eltérés egy adott  $a$  számtól:

$$A(a) = \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \dots + |x_n - a|}{n}.$$

Átlagos négyzetes eltérés egy  $a$  számtól:

$$N(a) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{n}.$$

Empirikus szórás a számtani közép-től való átlagos négyzetes eltérés négyzetgyöke:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{N(\bar{x})}.$$

→ Ezen az oldalon találhatjuk a legfontosabb statisztikai fogalmakat. Ezek általában 1-2 pontot érnek, de könnyen meghatározhatók, így mindenképpen sajátítsuk el a használatukat. A szórásat nehezebb kiszámolni, így ennek a kiszámítását többet érdemes gyakorolnunk a számológépünkkel.

# GRÁF

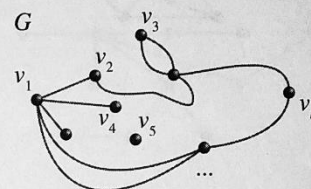
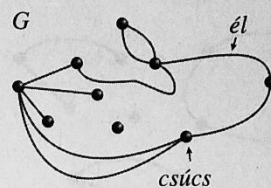
**GRÁF.** Gráfnak ( $G$ ) nevezzük pontok ( $V$ ) és élek ( $E$ ) azon halmazát, ahol az élek pontokat kötnek össze.

A  $V$  halmaz elemeit, azaz a pontokat, a **GRÁF CSÚCSAINAK** is nevezzük,  $V(G) = \{v_1; v_2; v_3; v_4; v_5; \dots v_n\}$ .

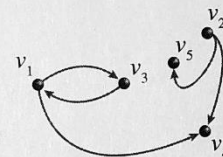
Az  $E$  halmaz elemeit a **GRÁF ÉLEINEK** nevezzük.

$$E(G) = \{e_1 = (v_1, v_2); e_2 = (v_1, v_4); e_3 = \dots e_k = (v_{n-1}, v_n)\}.$$

$$(E \subseteq V \times V)$$

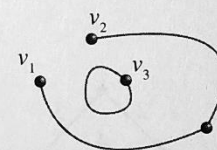


**IRÁNYÍTOTT GRÁF.** Irányított gráfok esetében szerepe van a csúcsok sorrendjének, azaz különbözik az  $e_1 = (v_1, v_3)$  és az  $e_2 = (v_3, v_1)$  él, az is lehet, hogy az egyik létezik csak.



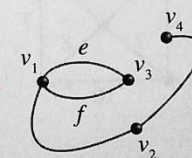
**IRÁNYÍTATLAN GRÁFOK** esetében nincs szerepe az élek sorrendjének, a  $(v_1, v_3)$  és a  $(v_3, v_1)$  ugyanazt az  $e$  élt jelenti.

**HUOKÉL.** Egy  $e$  élt hurokélnek nevezzük, ha az él két végpontja (csúcsa) megegyezik, például az  $e = (v_3, v_3)$  hurokél.



**TÖBBSZÖRÖS ÉL.** Az  $e, f$  éleket többszörös éleknek (párhuzamos éleknek) nevezzük, ha ugyanazok a végpontjaik.

**FOKSZÁM.** Egy gráf valamely csúcsának a fokszáma az adott csúcsból kiinduló élek száma.

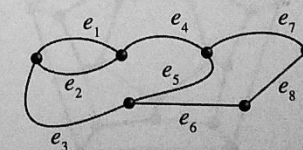


**SÉTA.** Csatlakozó élek sorozata.

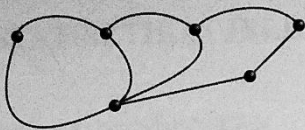
**VONAL.** Csatlakozó élek olyan sorozata, amelyben az élek nem ismétlődnek.

**ÚT.** Csatlakozó élek olyan sorozata, amelyben a csúcsok nem ismétlődnek (ekkor az élek között sem lehet ismétlődés) (például  $e_1, e_4, e_5, e_6$ ).

**KÖR.** Csatlakozó élek olyan sorozata, amelynek kezdő és végpontja megegyezik, és benne minden pont és minden él csak egyszer szerepel (például  $e_1, e_4, e_5, e_3$ ).

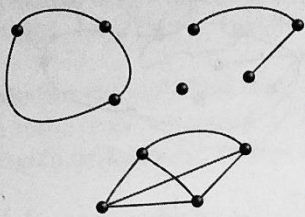


→ Az utolsó témakör a gráfelmélet. Itt a foksám definícióját valamint a következő oldalon található két összefüggést szükséges tudnunk.



**EGYSZERŰ GRÁF.** Azokat a gráfokat, melyekben nincs hurok-él és nincsenek többszörös élek, egyszerű gráfoknak nevezzük.

**ÖSSZEFÜGGŐ GRÁF.** A gráf összefüggő, ha bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk valamilyen úton.



**KOMPONENSEK.** Ha egy gráf nem összefüggő, akkor a maximális összefüggő részeit komponenseknek nevezzük. A komponensek a gráf „lehető legbővebb” összefüggő részgráfjai.

**FOKSZÁMTÉTEL.** Bármely véges gráfban a pontok fokszámának az összege az élek számának kétszerese (azaz páros szám).

*Következmény:* Bármely véges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.

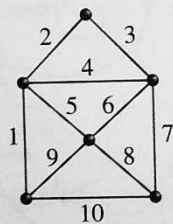
**TELJES GRÁF.** A teljes gráf olyan egyszerű gráf, melynek minden pontja minden ponttal össze van kötve.

Az  $n$  pontú teljes gráf éleinek a száma  $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$ .

**IZOLÁLT CSÚCS.** Egy  $v$  csúcs izolált, ha  $v$  fokszáma nulla.

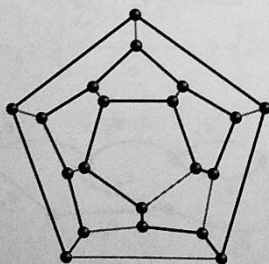
**D-REGULÁRIS GRÁF.** Egy gráfot  $d$ -regulárisnak nevezzük, ha minden csúcsának fokszáma  $d$ .

**REGULÁRIS GRÁF.** Egy gráfot regulárisnak nevezzük, ha valamilyen  $d$ -re reguláris.



**EULER-VONAL.** Egy olyan vonalat, mely a gráf minden élet pontosan egyszer tartalmazza, Euler-vonalnak nevezzük. Ha a vonal zárt, akkor **ZÁRT EULER-VONALNAK** nevezzük.

Legyen  $G$  egy izolált pont nélküli gráf. Ekkor  $G$ -ben pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha összefüggő, és minden foka páros,  $G$ -ben pontosan akkor van Euler-vonal, ha összefüggő, és legfeljebb két darab páratlan fokú csúcsa van.



**HAMILTON-ÚT, HAMILTON-KÖR.** Ha egy gráfban egy út minden csúcson átmegy, akkor azt Hamilton-útnak nevezzük. Ha egy gráfban egy kör minden csúcson átmegy, akkor Hamilton-körnek nevezzük.



*Ezek lennének tehát azok a dolgok, amiket kiemelnék a sárga négyjegyűben. Természetesen előfordulhat még 1-2 olyan képlet, amit felhasználhatnánk, viszont ezek vagy nem szerepelnek benne, vagy pedig sokkal összetettebben jelennek meg.*